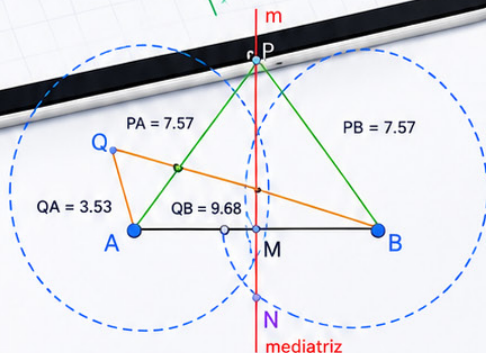
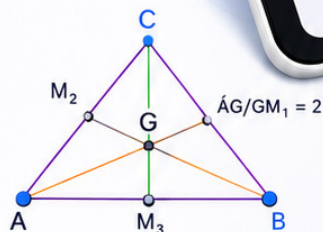
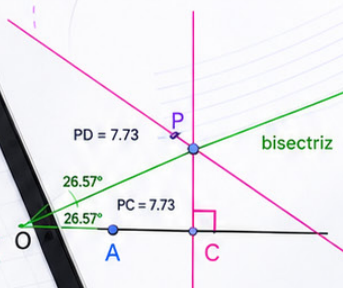
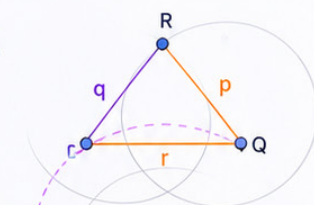
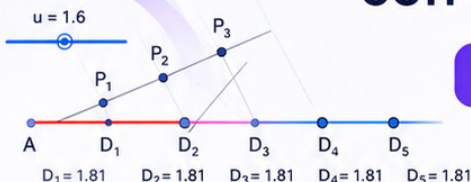


GEOMETRÍA EN *MOVIMIENTO*:

exploraciones didácticas
con **GeoGebra**

TOMO 1



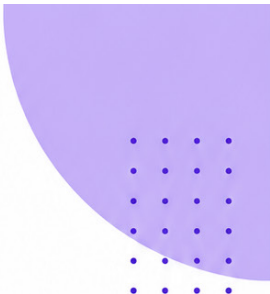
Graciela
Abad Peña

Katia Lisset
Fernández Rodríguez

Joel Alberto
Castro Muñoz

Johanna Graciela
Briones Franco

Marlene
Ayoví Vanegas



Geometría en *movimiento*:

exploraciones didácticas
con **GeoGebra**

Graciela Abad Peña
Katia Lisset Fernández Rodríguez
Joel Alberto Castro Muñoz
Johanna Graciela Briones Franco
Marlene Ayoví Vanegas

Dirección Editorial: PhD. Jorge Luis León-González
Diseño de portada y edición: DI. Yunisley Bruno-Díaz

ISBN: 978-1-968794-49-1

DOI: <https://doi.org/10.64092/SCZC1503>

© Graciela Abad Peña, 2026. All rights reserved.

© Katia Lisset Fernández Rodríguez, 2026. All rights reserved.

© Joel Alberto Castro Muñoz, 2026. All rights reserved.

© Johanna Graciela Briones Franco, 2026. All rights reserved.

© Marlene Ayoví Vanegas, 2026. All rights reserved.

La evaluación científica y metodológica de la obra se realizó a partir del método de Revisión por Pares Abierta (Open Peer Review).

Este libro es una publicación de acceso abierto con los principios de Creative Commons Attribution 4.0 International License, que permite el uso, intercambio, adaptación, distribución y transmisión en cualquier medio o formato, siempre que dé el crédito apropiado al autor, origen y fuente del material gráfico. Si el uso del material gráfico excede el uso permitido por la normativa legal deberá tener permiso directamente del titular de los derechos de autor.



SOPHIA EDITIONS

8404 N Rome Ave, Tampa,
Florida, USA

Email: contact@sophiaeditions.com

Phone: +1 (813) 699-2557

<https://sophiaeditions.com/>

DEDICATORIA

A todos los docentes que, día tras día, convierten el aula en un espacio de descubrimiento, donde cada pregunta abre un nuevo camino para pensar y cada error se transforma en una oportunidad para aprender.

A quienes comprenden que enseñar geometría no consiste únicamente en transmitir conceptos, sino en despertar la curiosidad, desarrollar el razonamiento y formar personas capaces de observar, argumentar y comprender el mundo desde una mirada crítica.

Este libro está dedicado especialmente a los docentes que creen que la educación se construye desde la reflexión, la innovación y el compromiso permanente con el aprendizaje de sus estudiantes. A quienes utilizan la tecnología no como un fin, sino como un puente para hacer visible lo invisible, para transformar la exploración en conocimiento y la intuición en comprensión.

También lo dedicamos a los futuros docentes, cuya pasión y creatividad seguirán renovando la enseñanza de las matemáticas, y a los investigadores que, con su trabajo, continúan ampliando las fronteras de la didáctica de la geometría.

Que estas páginas sean una invitación a mirar cada figura más allá de su forma, cada construcción más allá de sus procedimientos y cada clase como una oportunidad para formar ciudadanos capaces de pensar, crear y transformar la realidad.

Porque la verdadera geometría no se aprende únicamente con los ojos: se comprende con la mente, se construye con las manos y cobra sentido cuando un buen maestro logra despertar en sus estudiantes el deseo permanente de descubrir.

PhD. Juan Gabriel Rivera-Ortiz, Ana G. Méndez University, Estados Unidos

PhD. Armanda Matos, Universidade de Coimbra, Portugal

PhD. Domingo Antonio Lilón-Larrauri, Universidad de Pécs, Hungría

PhD. Frida Díaz-Barriga Arceo, Universidad Nacional Autónoma de México, México

PhD. Lok Raj Sharma, Makawanpur Multiple Campus, Nepal

PhD. Pamela Marcone-Dapelo, Universidad de Playa Ancha, Chile

PhD. Sébastien Quenot, Università di Corsica, Francia

PhD. Rafael Ravina-Ripoll, Universidad de Cádiz, España

PhD. Karen Pesantes-Aldana, Universidad Privada Antenor Orrego, Perú

PhD. Pablo Páramo-Bernal, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia

PhD. Eduardo Somarribas-Chávez, Centro Agronómico Tropical de Investigación y Enseñanza, Costa Rica

PhD. Lázaro Pino-Rivero, Lone Star College, Estados Unidos

PhD. Anurag Hazarika, Global Interfaith University, Estados Unidos

PhD. Setyamartana Parman, Sekolah Tinggi Teknologi Kedirgantaraan, Indonesia

PhD. Vicenç Font-Moll, Universidad de Barcelona, España

PhD. Ricardo Rivero-Ortega, Universidad de Salamanca, España

PhD. María Elena Estrada-Martínez, Colegio Palms Day School, Estados Unidos

PhD. Annette Lourdes Padilla-Gómez, Instituto de Educación de Aguascalientes, México

PhD. José Fernando Escobedo-Gálvez, Universidad Señor de Sipán, Perú

PhD. Ahmed G. Hegazy, National Research Centre, Egipto

PhD. Lilibeth Portillo-Rumbo, Universidad Autónoma de Tlaxcala, México

PhD. Ana María Téllez-López, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México

PhD. Alexandra Verónica Parra-Cárdenas, Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, Ecuador

PhD. Faisal A. Alnaser, Imperial College London, Reino Unido

PhD. Berlan Rodríguez-Pérez, Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú

PhD. José Alberto Rivera-Costales, Universidad de Santiago de Compostela, España

PhD. Claudia Wasserman, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

PhD. Enrique Rafael Farfán-Heredia, Universidad Autónoma del Carmen, México

PhD. Lali Viviana Cedeño-Sánchez, Universidad de Guayaquil, Ecuador

PhD. Odette Martínez-Pérez,
Universidad Bolivariana
del Ecuador, Ecuador

PhD. Moacir Gadotti,
Universidad de São
Paulo, Brasil

**PhD. Cesar Augusto
Bernal-Torres,** Universidad
de La Sabana, Colombia

**PhD. Lázaro Jesús
Ojeda-Quintana,** URBE
University, Estados Unidos

**PhD. Ángel Deroncele-
Acosta,** Universidad San
Ignacio de Loyola, Perú

**PhD. Rafael Gutiérrez-
Núñez,** Universidad
de Ciencias Médicas
de Granma, Cuba

**PhD. Alfredo Noré Saluanja-
Muacachila,** Universidade
do Namibe, Angola

**PhD. Ronald Antonio
Prieto-Pulido,** Universidad
Simón Bolívar, Colombia

**PhD. Nurian Yamileth
Luna-Laínez de Quintanilla,**
Universidad Gerardo
Barrios, El Salvador

**PhD. Lina María Cano-
Vásquez,** Universidad
Pontificia Bolivariana,
Colombia

**PhD. Jarosław
Korpysa,** University of
Szczecin, Polonia

PhD. Silvia Finocchio,
Universidad Nacional de
La Plata, Argentina

**PhD. Pablo Pérez-
Navarro,** Universidad
de Coimbra, Portugal

**PhD. Oscar José Alejo-
Machado,** Instituto
Superior Tecnológico de

Investigación Científica
e Innovación, Ecuador

**PhD. Juan Díaz-
Godino,** Universidad
de Granada, España

**PhD. Thiago Duarte-
Pimentel,** Universidade
Federal de Juiz de
Fora, Brasil

**PhD. Guadalupe Velázquez-
Vázquez,** Benemérita
Universidad Autónoma
de Puebla, México

**PhD. Lillian Rocio Pintado-
Sosa,** Universidad Ana
G. Méndez, Puerto Rico

PhD. Alexandru Manole,
ARTIFEX University of
Bucharest, Rumanía

PhD. Alina Borysova,
Kharkiv State Academy
of Culture, Ucrania

PhD. Irina Sokolova,
Don State Technical
University, Rusia

PhD. Nadezhda Fedko,
Rostov State Transport
University, Rusia

**PhD. Samikshya
Madhukullya,** Global
Interfaith University,
Estados Unidos

**PhD. Roberto Maurice
Robert,** 21st Century
Open University, Wyoming,
Estados Unidos.

Prólogo	i
Introducción	iv

Parte I. Enseñar geometría hoy: fundamentos y mediaciones

Capítulo 1. La geometría escolar como campo de enseñanza	1
1.1. La geometría en los currículos y en la práctica docente	3
1.2. La geometría como visualización, construcción, argumentación y modelación	5
1.3. De la percepción a la comprensión: el papel del prototipo y la definición	9
1.4. GeoGebra en las clases de geometría.....	13

Capítulo 2. Desarrollo del pensamiento geométrico...24	
2.1. Por qué hablar de desarrollo del pensamiento geométrico	24
2.2. Los niveles de razonamiento geométrico	29
2.3. Qué cambia de un nivel a otro	33
2.4. Las fases de aprendizaje y su valor didáctico	37
2.5. Implicaciones para la planificación y la evaluación ...	42

Parte II. La intervención docente y el diseño de tareas

Capítulo 3. Representación, visualización y comprensión	49
3.1. El objeto geométrico y su representación	49
3.2. Los registros de representación semiótica en geometría	53
3.3. GeoGebra como mediador entre registros	57

3.4. Implicaciones didácticas para la planificación	64
---	----

Capítulo 4. Geogebra como entorno de aprendizaje: potencialidades, riesgos y criterios de uso	71
--	----

4.1. GeoGebra como entorno de exploración y construcción	71
--	----

4.2. Potencialidades didácticas del uso de GeoGebra ..	79
--	----

4.3. Riesgos de un uso de GeoGebra meramente técnico	83
--	----

4.4. Criterios para decidir cuándo y para qué usar GeoGebra	89
---	----

Parte III. De la teoría a la acción

Capítulo 5. Figuras y relaciones: rectas, ángulos y triángulos	96
---	----

5.1. Rectas y ángulos: primeras relaciones que estructuran el espacio	96
---	----

5.2. Triángulos: clasificación y relaciones	112
---	-----

5.3. Rectas y puntos notables del triángulo	122
---	-----

Capítulo 6. Medida y proporcionalidad: congruencia, semejanza y el Teorema de Tales	140
--	-----

6.1. Congruencia: la invariancia bajo movimiento	140
--	-----

6.2. Semejanza: la conservación de la forma bajo cambio de escala	149
---	-----

6.3. El teorema de Tales: la geometría de la proporcionalidad	156
---	-----

Capítulo 7. Los cuadriláteros entre los polígonos.....	167
---	-----

7.1. Cuadriláteros y polígonos: de la forma a la propiedad	167
--	-----

CONTENIDO

7.2. Cuadriláteros: de la apariencia a la propiedad ...	171
7.3. Clasificación jerárquica y generalización a los polígonos	184
Capítulo 8. Circunferencia y círculo	199
8.1. Circunferencia y círculo	199
8.2. La circunferencia y sus elementos: una secuencia con GeoGebra	205
8.3. Razones, ángulos y polígonos: invariantes en la circunferencia	215
Epílogo	234
Referencias	237
Anexos	251

Pocas tareas son tan difíciles como enseñar geometría con sentido y significados en la escuela actual. Quien haya estado en un aula sabe que el desafío no consiste solo en presentar figuras con precisión técnica. El verdadero problema es lograr que esas figuras se conviertan, para los estudiantes, en objetos de pensamiento y no en simples imágenes para reconocer.

La distancia entre esos dos modos de entender la geometría atraviesa toda la clase, la elección de la tarea, la formulación de una consigna, la pregunta que el docente hace cuando un estudiante señala un dibujo en el pizarrón e incluso el silencio que sostiene mientras una conjetura comienza a tomar forma. En esa tensión se juega la enseñanza de la geometría. Y es precisamente allí donde este libro decide situarse.

Geometría en movimiento: exploraciones didácticas con GeoGebra. Tomo I es, ante todo, un libro escrito desde la práctica docente y para la práctica docente. No es un manual de actividades ni una recopilación de capturas de pantalla del software. Es una propuesta más ambiciosa y, también, más útil, una manera articulada de repensar la enseñanza de la geometría a partir de tres dimensiones que rara vez aparecen integradas en una misma obra.

La primera es la dimensión teórica. El lector reconocerá autores fundamentales como Van Hiele, Duval, Laborde, Fischbein, Fujita y Jones. Sin embargo, sus aportes no aparecen aquí como simples referencias de autoridad, sino como herramientas vivas para interpretar lo que sucede en el aula. La segunda es la dimensión didáctica. Las dificultades de los estudiantes son nombradas con precisión y se convierten en el punto de partida para diseñar tareas que las desafíen y las hagan visibles. La tercera es la dimensión tecnológica. GeoGebra deja de presentarse como un programa

destinado a ejecutar construcciones y pasa a convertirse en un entorno para pensar, decidir, argumentar y justificar.

Esta articulación constituye una de las principales virtudes del libro y, al mismo tiempo, su apuesta más exigente. Buena parte de la literatura sobre enseñanza de la geometría con software dinámico oscila entre dos extremos, esto es, textos teóricos que rara vez llegan al aula y secuencias de actividades sin un marco conceptual que las sostenga. Este Tomo I evita ambos riesgos mediante una estructura clara y eficaz.

Cada capítulo identifica primero los obstáculos epistemológicos del contenido. Luego propone un marco conceptual para comprenderlos, desarrolla actividades cuidadosamente diseñadas con GeoGebra y concluye devolviendo al docente preguntas sobre su propia práctica. El resultado es un recorrido constante entre teoría y acción, una conversación permanente entre reflexión y experiencia. En el fondo, el lector encontrará aquí una sólida formación didáctica presentada en formato de libro.

Quisiera destacar tres aspectos especialmente valiosos de la obra. El primero es la insistencia, sostenida desde el capítulo inicial hasta el último, en distinguir el dibujo del objeto geométrico. En ese marco, la prueba del arrastre aparece como un recurso central para volver visible esa diferencia. Quien haya trabajado en aulas reales sabe que esta es una de las dificultades más persistentes del aprendizaje geométrico, y el libro la enfrenta con coherencia conceptual y propuestas concretas. El segundo aspecto es el tratamiento de los registros de representación semiótica desarrollados por Duval. La teoría no se presenta como un contenido para citar, sino como una herramienta para planificar. Gracias a ello, muchos docentes comprenderán que ciertas dificultades de sus estudiantes no provienen de la falta de estudio, sino de problemas en la coordinación entre distintos registros de representación. El tercero es la mirada crítica sobre el uso de GeoGebra. El libro reconoce sus enormes posibilidades, pero también advierte, sin eufemismos, los riesgos que aparecen cuando el trabajo se reduce a una

secuencia mecánica de clics o cuando la observación pretende reemplazar a la demostración. Esa honestidad intelectual no es frecuente y resulta especialmente valiosa.

Quien abra este libro buscando recursos concretos los encontrará, hallará secuencias didácticas detalladas, construcciones paso a paso y preguntas orientadas a guiar la exploración. Pero encontrará también algo más importante, una manera de pensar la clase de geometría que trasciende cualquier actividad particular y que puede proyectarse hacia muchos otros contenidos.

En ese sentido, este Tomo I no debe entenderse como un punto de llegada, sino como un punto de partida. Las preguntas de reflexión docente que cierran cada capítulo lo dejan claro. Los autores no buscan clausurar la discusión, sino abrir una conversación profesional que continuará en el aula de cada lector.

Para los docentes de educación básica, secundaria y media, este libro será una herramienta de trabajo. Para los formadores de profesores, un texto de referencia. Para quienes investigan en didáctica de la matemática, una contribución que merece ser leída y discutida.

En todos los casos, será una invitación a asumir la enseñanza de la geometría como un campo profesional con identidad propia.

Wilber Ortiz Aguilar, PhD
Universidad de Guayaquil/Universidad
Bolivariana del Ecuador
Guayaquil, junio de 2026

INTRODUCCIÓN



La enseñanza de la geometría ocupa un lugar central en la educación matemática. Contribuye al desarrollo de capacidades de visualización, representación, análisis de relaciones espaciales, formulación de conjeturas y argumentación. Sin embargo, en la práctica escolar su enseñanza suele reducirse al reconocimiento de figuras, a la memorización de definiciones y a la aplicación mecánica de fórmulas. Esa reducción empobrece su sentido formativo y limita las oportunidades de los estudiantes para construir comprensiones más profundas, flexibles y transferibles. Este libro parte del convencimiento de que la distancia entre lo que la geometría escolar puede ser y lo que efectivamente se enseña no se resuelve con más contenidos ni con más recursos tecnológicos. Se resuelve con una mirada didáctica más atenta a los procesos de comprensión, representación, exploración y argumentación.

Las investigaciones en didáctica de la geometría han mostrado de manera consistente que muchas de las dificultades que enfrentan los estudiantes no son errores aislados, sino expresiones de obstáculos más profundos. Entre ellos destacan la dependencia de prototipos visuales, la confusión entre el dibujo y el objeto geométrico, la fijación en una sola representación y la distancia entre la imagen mental que un estudiante tiene de una figura y la definición matemática que la caracteriza (Fischbein, 1993; Fujita y Jones, 2007; Hershkowitz, 1990). Estos obstáculos no se superan por la simple exposición a más contenidos. Requieren experiencias de aprendizaje cuidadosamente diseñadas, capaces de poner en tensión las concepciones previas y permitir su reconstrucción.

Comprender estos obstáculos exige apoyarse en marcos teóricos que expliquen cómo se aprende geometría. La teoría de los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele (1986) permite reconocer que los estudiantes no acceden a las ideas geométricas del mismo modo ni con el mismo nivel de elaboración. Avanzan a través de niveles sucesivos, desde el reconocimiento visual hasta la deducción formal. La enseñanza requiere, por tanto, secuencias y experiencias coherentes con esos modos de pensar. Omitir niveles, o suponerlos consolidados

sin haberlos trabajado explícitamente, constituye una de las causas más frecuentes del fracaso en geometría.

La teoría de los registros de representación semiótica de Duval (2006) complementa esa mirada. Muestra que la comprensión en geometría no depende únicamente de ver una figura, sino de coordinar distintas formas de representación, esto es, visual, verbal, simbólica y dinámica. El estudiante debe poder pasar de unas a otras con sentido matemático. Una figura dibujada, una definición escrita, una expresión algebraica y una construcción dinámica pueden referirse al mismo objeto geométrico, pero exigen tratamientos cognitivos distintos. Aprender geometría es, en buena medida, aprender a operar en estos registros y a articularlos entre sí.

En este marco, el valor de GeoGebra no reside en su novedad tecnológica, sino en las oportunidades didácticas que habilita, esto es, explorar relaciones, construir objetos, arrastrar configuraciones, comparar invariantes, vincular representaciones y generar condiciones favorables para la comprensión (Laborde, 2000). Por ello, este libro no concibe a GeoGebra como un recurso accesorio ni como un simple software de dibujo geométrico. Lo asume como una herramienta de mediación didáctica que puede contribuir a que los estudiantes observen, construyan, comparen, formulen conjeturas, validen relaciones y comuniquen sus ideas matemáticas con mayor claridad. La función de arrastre, por ejemplo, permite distinguir entre lo que cambia en la apariencia de una figura y lo que permanece como propiedad. Hace visible aquello que el dibujo estático mantiene oculto.

Ninguna tecnología, sin embargo, garantiza por sí sola la comprensión, de ahí que, una actividad con GeoGebra pueda reducirse a la repetición de pasos o a la simple verificación visual si no está acompañada por una intencionalidad didáctica clara. Es la intención del docente, la calidad de las tareas propuestas, el tipo de preguntas que se formulan y la conducción de la discusión matemática lo que convierte una herramienta digital en una verdadera oportunidad de aprendizaje. Aprender geometría

no equivale únicamente a identificar figuras o a aplicar fórmulas. Implica desarrollar modos de ver, de representar, de relacionar propiedades, de distinguir lo esencial de lo accesorio y de justificar por qué una afirmación puede considerarse válida. Implica, sobre todo, que el docente intervenga con intención. Esa intervención supone anticipar dificultades, formular preguntas productivas, gestionar las discusiones del aula y acompañar el paso desde la observación hacia la argumentación. A construir esa intervención docente, fundamentada y reflexiva, se orientan los capítulos de este Tomo I.

Esta obra está dirigida a docentes de matemática y de geometría escolar que buscan fortalecer su práctica a partir de fundamentos teóricos sólidos y de propuestas de aula mediadas por GeoGebra. Su propósito no consiste en ofrecer una secuencia cerrada de contenidos para un grado específico, sino en proporcionar orientaciones didácticas transferibles a distintos niveles de la escolaridad. Por ello, el libro se ha pensado como una guía para docentes de educación básica, secundaria y media, con la intención de que pueda adaptarse a diversos contextos curriculares y a las particularidades de cada grupo. También puede resultar útil a formadores de profesores y a estudiantes de pedagogía en matemática, en tanto ofrece un marco articulado entre la teoría didáctica y el diseño de tareas con tecnología.

El Tomo I se organiza en tres partes internas que avanzan de los fundamentos hacia la acción didáctica. La primera, Enseñar geometría hoy: fundamentos y mediaciones, ofrece el marco teórico desde el que se piensa la enseñanza de la geometría escolar y discute cómo se desarrolla el pensamiento geométrico de los estudiantes. La segunda, La intervención docente y el diseño de tareas, profundiza en los procesos de representación y visualización, y analiza las potencialidades, los riesgos y los criterios de uso de GeoGebra como entorno de aprendizaje. La tercera, De la teoría a la acción, traduce esos fundamentos en propuestas concretas para el aula, organizadas alrededor de las figuras y relaciones geométricas que estructuran el currículo escolar, desde las rectas y los ángulos hasta la circunferencia y

el círculo, pasando por los triángulos y sus puntos notables, las relaciones de congruencia, semejanza y proporcionalidad, y los cuadriláteros y polígonos.

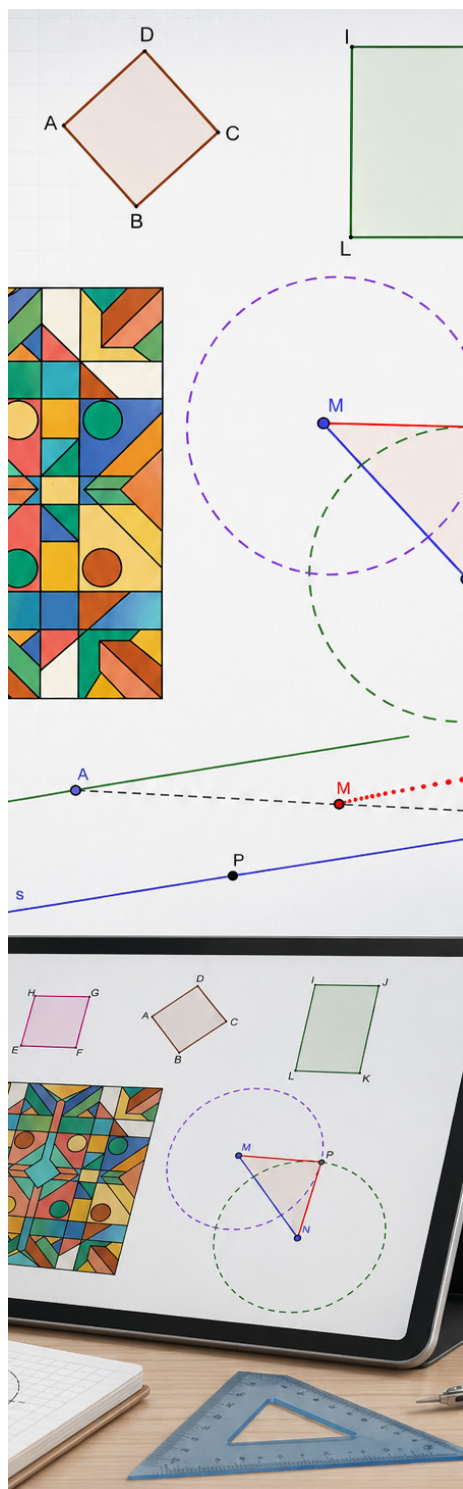
Cada capítulo procura mantener un equilibrio entre la reflexión teórica y la aplicación didáctica. Las actividades con GeoGebra no aparecen como recetas descontextualizadas, sino como propuestas pensadas para promover observación, comprensión, experimentación, conjetura y argumentación. Cada actividad incluye intenciones didácticas explícitas, una construcción sugerida paso a paso y un conjunto de Preguntas para la reflexión estructuradas alrededor de tres niveles centrales (observación, comprensión y conjetura), que en algunos casos se complementan con niveles específicos según el contenido trabajado, como clasificación, generalización o verificación.

Estas preguntas acompañan el desarrollo de la tarea y están dirigidas tanto al estudiante como al docente que media en el proceso. Al final de cada capítulo, el lector encontrará un cierre articulador y un conjunto distinto de Preguntas para la reflexión docente, orientadas a revisar la propia práctica de enseñanza más allá de cualquier actividad particular.

El libro admite distintos modos de lectura. Quien busque recorrerlo completo encontrará una progresión articulada que va de los fundamentos hacia las figuras concretas. Quien prefiera consultarlo por temas puede acudir directamente a los capítulos de la Parte III según sus necesidades didácticas. Los Anexos, que reúnen las herramientas de GeoGebra utilizadas en el libro y un mapa de actividades por contenido y nivel, facilitan esa consulta puntual. Las preguntas para la reflexión docente, por su parte, están pensadas para sostener tanto el trabajo individual como el diálogo entre colegas, ya sea en bitácoras personales, en grupos de estudio o en espacios de formación continua.

Este Tomo I constituye la primera entrega de un proyecto más amplio de dos tomos. El Tomo II, actualmente en preparación, continuará el recorrido didáctico que aquí se inicia y prolongará la apuesta por una enseñanza de la geometría más reflexiva, mediada y comprensiva. Este primer volumen aspira a

constituirse no solo en un material de consulta, sino en una herramienta de trabajo para la planificación, la mediación pedagógica y la reflexión sobre la práctica. Representa, en último término, una invitación a repensar la enseñanza de la geometría desde una perspectiva dinámica, comprensiva y didácticamente fundamentada. La convicción que la sostiene es clara, una enseñanza más intencional, más reflexiva y mejor mediada puede abrir mejores oportunidades para que los estudiantes comprendan la geometría, la representen de múltiples maneras y la vivan como un campo de pensamiento, exploración y argumentación.



Parte I. Enseñar geometría hoy: fundamentos y mediaciones

01.

La geometría escolar como campo de enseñanza

¿Qué hace que la geometría se enseñe efectivamente en las aulas, más allá de aparecer en los documentos curriculares? ¿Cómo puede el docente diseñar experiencias que permitan a sus estudiantes avanzar desde el reconocimiento visual de figuras hacia la comprensión de las relaciones que las constituyen? ¿Qué lugar ocupan en este recorrido las herramientas digitales como GeoGebra, y cómo pueden integrarse sin reducirse a un mero recurso ilustrativo?

Este primer capítulo aborda estas preguntas situándolas en el contexto de la práctica del aula. Por eso antes de entrar en los contenidos geométricos específicos que estructurarán los capítulos siguientes,



conviene detenerse en aquello que da sentido a la enseñanza de la geometría como campo profesional. Estamos haciendo alusión a las condiciones curriculares que la enmarcan, las dimensiones que la atraviesan, los modos en que los estudiantes se aproximan a las figuras y los recursos didácticos que pueden potenciar su aprendizaje.

Este capítulo se organiza en cuatro apartados que avanzan de lo institucional hacia lo concreto. El primero examina el lugar de la geometría en los currículos escolares y en la práctica docente cotidiana, identificando la brecha que suele abrirse entre lo que se prescribe y lo que efectivamente se enseña. El segundo propone pensar el aprendizaje geométrico desde cuatro dimensiones complementarias: visualización, construcción, argumentación y modelación, que ofrecen un marco para diseñar tareas que van más allá que la mera identificación o el cálculo. El tercero se detiene en un fenómeno didáctico recurrente como es el modo en que los estudiantes reconocen figuras a partir de prototipos visuales y la manera en que las definiciones pueden convertirse en herramientas activas de razonamiento. El cuarto presenta a GeoGebra como un recurso integrador que articula esas cuatro dimensiones en un mismo entorno dinámico.

El capítulo se cierra con una síntesis articuladora y un conjunto de preguntas para la reflexión docente, pensadas para que el lector dialogue lo expuesto con su propia experiencia profesional. La intención no es prescribir una manera única de enseñar geometría, sino ofrecer un horizonte de posibilidades que cada docente podrá adaptar a su contexto. Sobre esta base, los capítulos siguientes desarrollarán los contenidos geométricos específicos, manteniendo siempre la doble mirada que aquí se introduce: la mirada conceptual sobre la disciplina y la mirada didáctica sobre su enseñanza.

1.1. La geometría en los currículos y en la práctica docente

En la escuela, la geometría puede convertirse en un espacio para aprender a observar, comparar, construir, representar, anticipar, justificar y comunicar ideas matemáticas. Enseñar geometría supone diseñar experiencias que permitan a los estudiantes avanzar desde una percepción inicial de las figuras hacia una comprensión basada en propiedades, relaciones e invariantes.

Esta mirada se corresponde con enfoques curriculares contemporáneos que organizan la matemática escolar por grandes bloques de contenidos, promueven metodologías activas y reconocen el papel de la tecnología como apoyo del aprendizaje.

La geometría aparece en los currículos escolares como uno de los grandes bloques de la formación matemática, junto con el trabajo numérico, el algebraico y el estadístico. Sin embargo, su presencia efectiva en las aulas suele ser menor de lo que los documentos oficiales prescriben. Con frecuencia se reduce a una unidad final del año escolar, se trabaja de manera fragmentada o se posterga ante la presión de otros contenidos. Reconocer esta brecha entre el currículo prescrito y el currículo enseñado es un primer paso para tomar decisiones profesionales informadas.

La figura 1.1 sintetiza esta tensión, o sea, lo prescrito no se traduce de forma automática en lo enseñado, y la diferencia entre ambos depende, en buena medida, de las decisiones que el docente toma a diario.



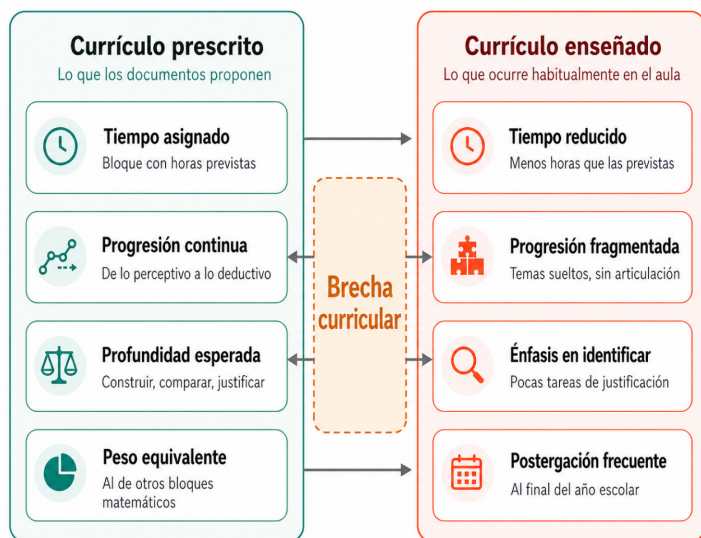


Figura 1.1. Brecha entre el currículo prescrito y el currículo enseñado en la enseñanza de la geometría.

En el plano curricular, la geometría se organiza habitualmente como una progresión que parte de la exploración del espacio y de las formas del entorno en los primeros años, avanza hacia el estudio sistemático de figuras y propiedades en los años intermedios e incorpora la argumentación geométrica y los inicios de la demostración en los últimos años de la educación media. Esta progresión, sin embargo, no se traduce automáticamente en aprendizajes, depende del modo en que cada docente seleccione las tareas, organice las clases y articule la enseñanza de la geometría con el resto del trabajo matemático.

En el plano de la práctica docente, enseñar geometría supone decisiones que van más allá de cubrir contenidos. Implica elegir entre tareas que piden identificar figuras y tareas que piden construir, comparar o justificar; decidir cuánto tiempo dedicar a la exploración con materiales concretos o con software dinámico; y definir qué se va a evaluar: la respuesta correcta, el procedimiento, la justificación o el conjunto de los tres. Estas decisiones, muchas veces invisibles

para el estudiante, configuran lo que efectivamente se aprende.

Pensar la geometría escolar como campo de enseñanza requiere, entonces, mirar al mismo tiempo lo que el currículo propone y lo que la práctica docente hace posible. Los apartados siguientes profundizan en las dimensiones del aprendizaje geométrico que pueden ponerse en juego para cerrar esa brecha, y en los recursos didácticos que las hacen posibles.

Reconocer la brecha entre el currículo prescrito y el currículo enseñado no busca señalar carencias, sino ofrecer al docente un punto de partida para revisar su propia práctica con una mirada informada. Cerrar esa brecha requiere apoyarse en marcos didácticos que orienten la selección de tareas, en una comprensión clara de cómo aprenden los estudiantes y en recursos que faciliten experiencias significativas. Estos tres elementos, esto es, las dimensiones del aprendizaje geométrico, los modos en que se reconoce y se define una figura, y la integración de la geometría dinámica, son los que se desarrollan en los apartados siguientes.

Síntesis del apartado

Lo expuesto en este apartado deja entrever que la enseñanza efectiva de la geometría no depende solo de la disponibilidad de un currículo bien formulado, sino de la mediación profesional que el docente ejerce al traducirlo en experiencias concretas de aprendizaje. Entre el documento curricular y el aula se despliega un margen amplio de decisiones, sobre el tiempo, las tareas, los recursos y la evaluación, que define en gran medida lo que los estudiantes aprenderán.

1.2. La geometría como visualización, construcción, argumentación y modelación

Pensar la geometría escolar como campo de enseñanza implica reconocer que no se aprende de una única manera. Un estudiante puede mirar una figura, pero no necesariamente comprenderla; puede reproducir



una construcción, pero no advertir qué relaciones permanecen; puede responder correctamente un ejercicio, pero sin poder explicar por qué su respuesta tiene sentido. Por eso, en la enseñanza de la geometría conviene distinguir al menos cuatro dimensiones complementarias: visualización, construcción, argumentación y modelación.

La visualización no consiste simplemente en ver una figura, sino en aprender a observarla matemáticamente. Observar matemáticamente significa identificar elementos relevantes, distinguir propiedades esenciales de rasgos accidentales y reconocer relaciones que no dependen solo de la apariencia.

- **Ejemplo 1.** El docente muestra tres cuadriláteros (Figura 1.2): un cuadrado en posición usual, un cuadrado girado y un rectángulo. Luego pregunta: ¿Cuál de estas figuras es un cuadrado? Es probable que varios estudiantes elijan únicamente el primero, porque se apoyan en una imagen prototípica.

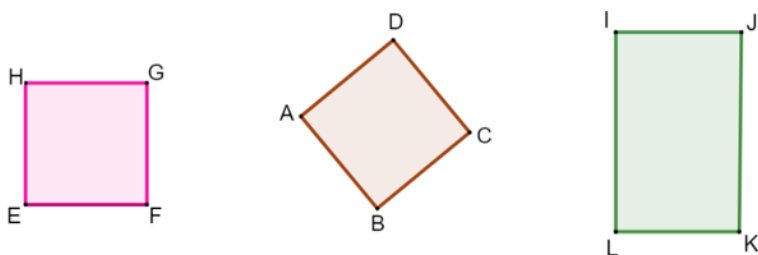


Figura 1.2. Cuadrado en posición canónica (prototípica o usual), cuadrado rotado y rectángulo.

En este caso, como docente podemos intervenir para discutir dependencia de prototipos con preguntas como:

- ¿Qué condiciones debe cumplir una figura para ser un cuadrado?
- ¿Cambiar de posición cambia la figura?
- ¿Qué propiedades observas que se conservan?

Este momento es didácticamente importante porque permite mostrar que el reconocimiento inicial suele depender de la apariencia prototípica de la figura y no de sus propiedades. De ahí que, el valor didáctico no está en corregir de inmediato, sino en usar la situación para desplazar la atención desde la imagen visual hacia las propiedades geométricas.

La construcción ocupa también un lugar central en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, con independencia del nivel educativo de que se trate. Construir en geometría no significa solo dibujar una figura parecida, sino producirla bajo ciertas condiciones. Una construcción geométrica obliga a tomar decisiones y a comprender las relaciones entre los objetos.

- **Ejemplo 2.** En lugar de pedir a los estudiantes que dibujen un triángulo isósceles, el docente puede proponer que lo construyan a partir de un segmento base mediante un procedimiento que garantice que dos de sus lados sean iguales. La diferencia didáctica es importante, en el primer caso, el estudiante puede limitarse a dibujar una figura que parezca un triángulo isósceles; en el segundo, necesita pensar qué condición permite garantizar la igualdad de dos lados.

Una posible discusión posterior sería: ¿qué hizo que el triángulo construido fuera isósceles?, ¿cómo podrías explicarlo sin decir solo porque se ve así?, ¿qué pasaría si movemos uno de los puntos de la construcción? El procedimiento concreto para realizar esta construcción en GeoGebra se desarrolla en el apartado 1.4.

La argumentación aparece cuando el estudiante deja de apoyarse únicamente en lo visual y comienza a justificar. En geometría, esto es fundamental, ya que no basta con decir que algo parece cumplirse: es necesario explicar por qué se cumple. Con ello, los estudiantes comienzan a transitar desde la percepción hacia la justificación.

- **Ejemplo 3.** Después de construir varios triángulos isósceles, el docente puede preguntar, ¿Qué ocurre con los ángulos de la base? Algunos estudiantes pueden responder: Se ven iguales. Esa respuesta puede ser un punto de partida, pero no un punto de llegada.

Como docente podemos conducir la siguiente discusión: ¿Siempre ocurre? ¿Cómo lo comprobaste? ¿Puedes explicarlo usando una propiedad y no solo una observación?

La cuarta dimensión es la **modelación** que, en términos generales, consiste en tomar una situación del mundo real o de otro contexto y representarla mediante objetos y relaciones matemáticas para analizarla, explicarla o resolver problemas. En este sentido, la geometría cobra mayor significado cuando ayuda a representar y analizar situaciones del entorno.

- **Ejemplo 4.** Como docentes, podemos presentar el croquis de una cancha, un plano simple del aula o el diseño de una ventana con simetrías (Figura 1.3). La pregunta ya no sería solo ¿qué figura se observa aquí?, sino también ¿qué relaciones geométricas ayudan a describir esta situación?

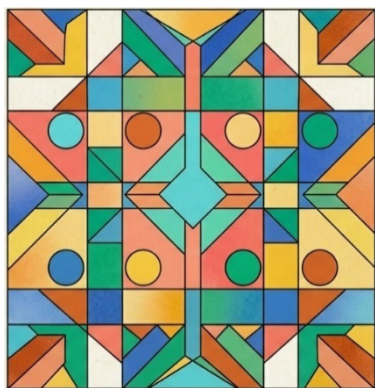


Figura 1.3. Diseño de un mosaico para discutir simetría y regularidad.



Síntesis del apartado

Pensar la geometría desde estas cuatro dimensiones tiene consecuencias didácticas importantes ya que, nos obliga a diseñar actividades que no se agoten en identificar o calcular, sino que abran espacio para observar, construir, experimentar, discutir y representar. Este cambio de enfoque permite que la geometría deje de verse como una colección de figuras aisladas y se convierta en una herramienta para interpretar y organizar el espacio.

1.3. De la percepción a la comprensión: el papel del prototipo y la definición

Uno de los retos más frecuentes en la enseñanza es que los estudiantes suelen reconocer figuras por su apariencia global y no por las propiedades que las definen. Este fenómeno no debe interpretarse únicamente como un error; también puede entenderse como una etapa inicial del aprendizaje. El problema surge cuando la enseñanza no ayuda a superar ese nivel de reconocimiento.

- **Ejemplo 1.** Un estudiante afirma que una figura no es un cuadrado porque parece rombo. En ese caso, como docente podemos aprovechar la situación para trabajar una idea central, la orientación no modifica la naturaleza geométrica de la figura 1.4.

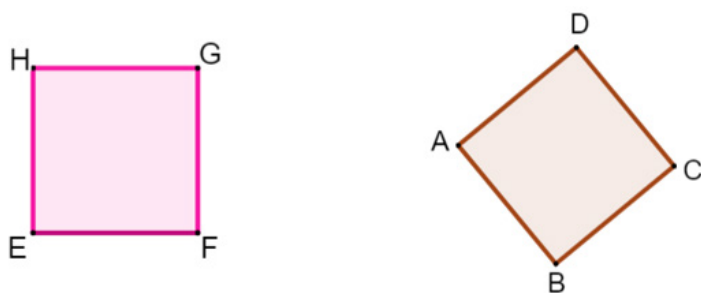


Figura 1.4. Variación de una misma figura en diferentes orientaciones y proporciones.





Una intervención útil por parte del docente podría ser realizar preguntas como: ¿qué tendría que cambiar para que dejara de ser cuadrado?, ¿cambiar la posición modifica la longitud de los lados?, ¿cambiar la posición modifica los ángulos? Este tipo de preguntas ayuda a desplazar la atención desde la percepción inmediata hacia la comprensión de propiedades invariantes.

Sin embargo, el fenómeno del prototipo no se limita a los cuadriláteros. Aparece en muchos otros conceptos geométricos cuando el estudiante asocia una propiedad con la apariencia visual habitual con la que se le ha presentado.

- **Ejemplo 2.** El docente pide a los estudiantes que tracen la altura correspondiente al lado más corto de un triángulo obtusángulo. Muchos no lo logran porque la altura no cabe dentro del triángulo. Esta dificultad revela que el estudiante asocia la altura con un trazo interior a la figura, no con su definición geométrica; o sea, un segmento perpendicular desde un vértice a la recta que contiene el lado opuesto. La pregunta clave es, ¿qué define a la altura, su posición visual o la relación geométrica que establece?
- **Ejemplo 3.** El docente presenta tres triángulos, uno equilátero apoyado sobre una base horizontal, uno escaleno muy alargado y casi tumbado, y uno obtusángulo con un ángulo abierto que ocupa gran parte de la figura. Al preguntar cuáles son triángulos, algunos estudiantes dudan del segundo o del tercero porque no se ven como un triángulo. El docente puede entonces orientar la discusión, ¿cuántos lados tiene cada figura?, ¿cuántos vértices?, ¿la inclinación o las proporciones cambian su naturaleza geométrica?

Este tránsito de la percepción a la comprensión está estrechamente vinculado con el uso que los estudiantes hacen de las definiciones. En muchos contextos escolares, las definiciones aparecen como frases para

memorizar. Sin embargo, en geometría una definición no debería ser solo un enunciado verbal que el estudiante repite, sino una herramienta para identificar, clasificar, comparar y justificar.

- **Ejemplo 4.** Si como docente preguntamos ¿qué es un rectángulo?, algunos estudiantes responderán: una figura que tiene dos lados largos y dos cortos. Esa respuesta muestra un reconocimiento parcial apoyado en un ejemplo usual, pero no en una definición geométrica. Para problematizarla, el docente puede mostrar la figura 1.5 y preguntar si el cuadrado también es un rectángulo. Si la respuesta es no, porque sus lados son iguales, conviene contrastarla con la definición geométrica, un rectángulo es un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos. Bajo esa definición, el cuadrado sí es un rectángulo, pues cumple con esa condición y la supera. La definición popular (dos lados largos y dos cortos) es prototípica; la definición geométrica es relacional.

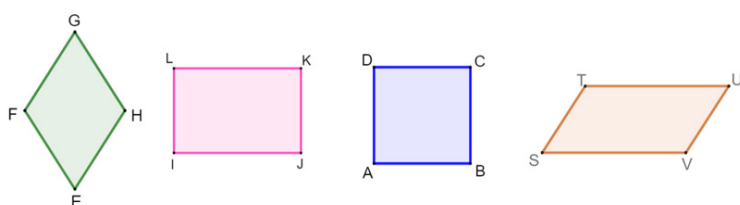


Figura 1.5. Cuadriláteros para discutir definiciones: rombo, rectángulo, cuadrado y paralelogramo.

Con estas figuras, podemos conducir una conversación mediante las siguientes preguntas:

- ¿Cuál de estas figuras tiene cuatro ángulos rectos?
- ¿Cuál tiene cuatro lados iguales?
- ¿Puede una figura cumplir ambas condiciones?
- ¿Qué relación hay entre cuadrado y rectángulo? ¿Y entre cuadrado y rombo?





Aquí la discusión ya no gira solamente en torno al nombre de cada figura, sino a las relaciones entre propiedades. Eso resulta didácticamente productivo, porque ayuda a construir clasificaciones más amplias y menos rígidas.

La discusión sobre las definiciones puede ir incluso más lejos cuando se descubre que una misma figura puede tener definiciones distintas según el contexto.

- **Ejemplo 5.** El docente pregunta ¿qué es un trapecio? Algunos estudiantes responden: un cuadrilátero con un par de lados paralelos; otros añaden, y solo uno. Esta discrepancia no es casualidad, refleja dos definiciones que conviven en distintos países y manuales. Bajo la definición inclusiva (al menos un par de lados paralelos), todo paralelogramo es un trapecio. Bajo la definición exclusiva (exactamente un par de lados paralelos), no lo es. La pregunta para el aula no es cuál definición es verdadera, sino qué consecuencias tiene cada una para la clasificación de los cuadriláteros, y por qué la geometría matemática moderna tiende a preferir las definiciones inclusivas. Este tipo de discusión muestra al estudiante que las definiciones no son frases inmutables, sino convenciones razonadas que la comunidad matemática adopta porque resultan más útiles para razonar.

La enseñanza de la geometría se vuelve más rica cuando deja de centrarse únicamente en qué figura es y empieza a preguntar qué propiedades tiene, qué relación guarda con otra figura o bajo qué condición se mantiene. El cambio de mirada se refleja también en la consigna que se le propone al estudiante.

- **Ejemplo 6.** En lugar de pedirle simplemente: identifica el rombo, podemos plantearle: busca todas las figuras que tengan cuatro lados iguales y después explica por qué no todas son cuadrados. O bien: dibuja un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos que no sea un cuadrado. La primera

consigna desplaza la atención hacia el análisis comparativo de propiedades; la segunda obliga al estudiante a usar la definición como herramienta operativa para construir un caso que satisfaga ciertas condiciones.

Síntesis del apartado

El tránsito de la percepción a la comprensión no consiste en abandonar lo visual, sino en aprender a sostenerlo con criterios geométricos fundamentados. Los ejemplos discutidos a lo largo del apartado, comparten un mismo trasfondo, la apariencia visual ofrece pistas, pero no agota la naturaleza geométrica del objeto. Esa naturaleza se revela cuando el estudiante atiende a las propiedades invariantes y a las relaciones que cada figura guarda con otras.

El papel del docente debe ser, por una parte, reconocer el reconocimiento prototípico como un punto de partida legítimo, no como un error que descalificar. Por la otra, diseñar intervenciones que conduzcan al estudiante a reorganizar esa percepción inicial. Las preguntas que problematizan, las consignas que exigen construir un contraejemplo, las definiciones que se ponen en discusión y las clasificaciones que admiten relaciones de inclusión son recursos que hacen visible el carácter relacional de la geometría.

Esta manera de instruir prepara al estudiante para los modos de razonamiento que la geometría dinámica permite desarrollar plenamente, donde el arrastre y la construcción condicionada convierten lo invariante en una experiencia perceptible. Cómo se aprovechan esos recursos en el aula es el tema del apartado siguiente.

1.4. GeoGebra en las clases de geometría

GeoGebra es un software libre de matemática dinámica que combina geometría, álgebra y representaciones gráficas. Para la enseñanza de la geometría escolar resulta especialmente útil porque articula, en un mismo entorno, las cuatro dimensiones discutidas en el



apartado 1.2. O sea, permite visualizar figuras desde distintas posiciones, construirlas bajo condiciones precisas, argumentar a partir de lo que se conserva al arrastrar un punto y modelar situaciones del entorno con objetos geométricos.

En este sentido, GeoGebra puede ser un recurso valioso en la enseñanza de la geometría cuando se usa para hacer visibles relaciones que una figura fija no permite advertir con claridad. Su aporte didáctico no consiste en dibujar mejor, sino en permitir construir, arrastrar, variar y observar qué cambia y qué permanece.

A continuación, se presentan tres ejemplos de actividades paradigmáticas del aporte de GeoGebra, uno sobre la construcción condicionada (triángulo isósceles), otro sobre la prueba de arrastre como dispositivo argumentativo (cuadrado) y un tercero sobre el rastro como revelador de una trayectoria geométrica (punto medio entre paralelas).

Actividad con GeoGebra 1: El triángulo isósceles como construcción condicionada.

Objetivo: Construir un triángulo isósceles bajo condiciones geométricas y verificar que sus lados iguales se conservan al arrastrar.

Idea didáctica: Desplazar la atención del estudiante desde la apariencia hacia la propiedad. La igualdad de los dos lados de un triángulo isósceles no se logra dibujando con cuidado, sino imponiendo una condición geométrica que la garantice. Las dos circunferencias del mismo radio cumplen esa función, ya que obligan al vértice opuesto a la base a estar a la misma distancia de sus dos extremos, propiedad que la prueba del arrastre permite verificar como invariante.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Seleccionar la herramienta **Segmento** y trazar el segmento **MN**.

2. Seleccionar la herramienta **Circunferencia: centro y radio**. Hacer clic en **M** e ingresar un radio determinado.
3. Con la misma herramienta **Circunferencia: centro y radio**, hacer clic en **N** e ingresar el mismo radio usado en la circunferencia anterior.
4. Seleccionar la herramienta **Intersección** y marcar uno de los puntos donde se intersecan las dos circunferencias y nombrarlo por ejemplo P.
5. Seleccionar la herramienta **Segmento** y unir **M** con **P**, y **N** con **P**.
6. Si se considera necesario, usar la herramienta **Distancia o Longitud** para comprobar que $\overline{MN} = \overline{NP}$.
7. Seleccionar la herramienta **Mueve** y arrastrar los puntos **M** o **N** para observar que el triángulo cambia de posición o tamaño (Figura 1.6), pero conserva la igualdad de los lados $\overline{MN}$ y $\overline{NP}$.

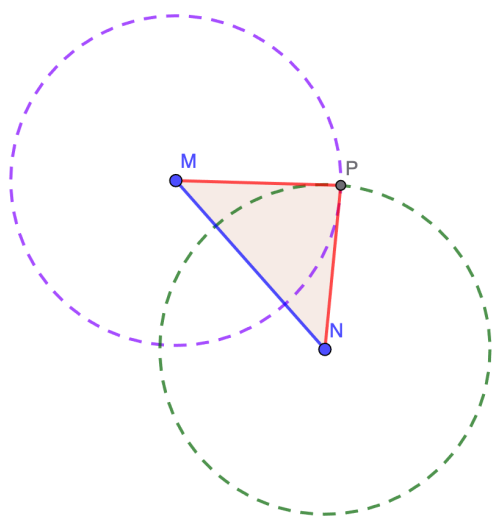


Figura 1.6. Construcción de un triángulo isósceles sobre la base $\overline{MN}$, mediante dos circunferencias de igual radio con centros en M y N.

Aquí la diferencia didáctica respecto a un dibujo libre es decisiva: la igualdad de los lados no es accidental, sino una consecuencia necesaria del procedimiento. Al arrastrar los puntos, esa propiedad se conserva.

Preguntas para la reflexión:

- a) **Observación:** ¿Qué cambia al arrastrar los puntos **M** o **N**? ¿Qué permanece invariante? ¿Los lados **MN** y **NP** siguen midiendo lo mismo, sin importar la posición de los vértices?
- b) **Comprensión:** ¿Qué hizo que el triángulo construido fuera isósceles, sin haberlo dibujado «a ojo»? ¿Cómo podríamos explicarlo sin decir solo «porque se ve así»? ¿Qué papel cumplen las circunferencias en garantizar la igualdad de los dos lados?
- c) **Conjetura:** Si en lugar de usar dos circunferencias del mismo radio se usaran dos de radios distintos, ¿qué tipo de triángulo se obtendría? ¿Bajo qué condición la construcción produciría un triángulo equilátero?

Actividad con GeoGebra 2: Prueba de arrastre: el cuadrado.

Objetivo: Verificar que un cuadrado conserva sus propiedades, aunque cambie de posición u orientación.

Idea didáctica: Promover que los estudiantes identifiquen las propiedades invariantes que definen al cuadrado mediante la exploración dinámica en GeoGebra y la prueba de arrastre, reconociendo que, aunque cambien el tamaño, la posición o la orientación de la figura, se conservan la igualdad de sus lados y sus cuatro ángulos rectos; además, se busca favorecer la formulación de conjeturas y la diferenciación entre un cuadrado y otras figuras con propiedades semejantes, como el rombo.



Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Seleccionar la herramienta **Punto** y marcar dos puntos, **A** y **B**.
2. Seleccionar la herramienta **Polígono regular**. Hacer clic primero en el punto **A**, luego en el punto **B**, e indicar “4” vértices en la ventana emergente para construir el cuadrado sobre el segmento **AB**.
3. Mostrar, si se considera necesario, la longitud de los lados y la medida de los ángulos (usando la herramienta **Distancia o Longitud** y la herramienta **Ángulo**, respectivamente).
4. Seleccionar la herramienta **Mueve** (flecha) y arrastrar uno de los puntos de control de la base (**A** o **B**) para cambiar el tamaño y la orientación de la figura 1.7.

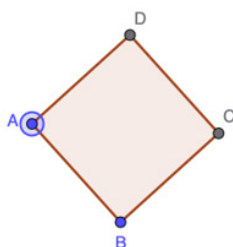
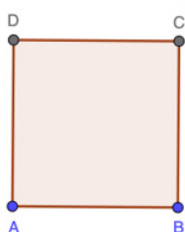


Figura 1.7. Prueba de arrastre en GeoGebra, el cuadrado cambia de posición, orientación y tamaño al mover sus puntos de control, pero conserva la igualdad de sus lados y la medida de sus ángulos.

Preguntas para la reflexión:

- a) Observación:** ¿Qué cambia al mover la figura? ¿Qué permanece invariante? ¿Las medidas de los cuatro lados siguen siendo iguales entre sí? ¿Los ángulos siguen siendo rectos?
- b) Comprensión:** ¿Por qué sigue siendo un cuadrado, aunque se vea diferente? ¿Qué propiedades definen al cuadrado? ¿La orientación forma parte de su definición geométrica?
- c) Conjetura:** Si una figura tiene cuatro lados iguales, ¿siempre es un cuadrado? ¿Qué otra condición



habría que comprobar para asegurar que lo es?
¿Puede existir una figura con cuatro lados iguales sin tener cuatro ángulos rectos? Si es posible, intenta construirla.

Actividad con GeoGebra 3: Rastro y trayectoria: el punto medio que dibuja una recta.

Objetivo: Identificar la trayectoria descrita por el punto medio de un segmento cuyos extremos se desplazan sobre rectas paralelas.

Idea didáctica: Promover que los estudiantes comprendan cómo el movimiento de un punto puede generar una trayectoria geométrica y revelar relaciones invariantes que no son evidentes en una representación estática. A través del uso del rastro en GeoGebra, se busca que identifiquen que el punto medio de un segmento cuyos extremos se desplazan sobre rectas paralelas describe otra recta paralela, favoreciendo la observación, la formulación de conjeturas y la comprensión de relaciones geométricas vinculadas con el paralelismo y la proporcionalidad.

Pasos en GeoGebra:

1. Seleccionar la herramienta **Recta** y trazar una recta **r** en la vista gráfica (Figura 1.8).
2. Seleccionar la herramienta **Punto** y ubicar un punto **P** exterior a **r**.
3. Seleccionar la herramienta **Recta paralela** y trazar una recta **s** paralela a **r** que pase por **P**.
4. Seleccionar la herramienta **Punto** y ubicar un punto **A** sobre **r** y un punto **B** sobre **s**.
5. Seleccionar la herramienta **Segmento** y unir **A** y **B**.
6. Con la herramienta **Punto medio o centro**, marcar el punto medio **M** del segmento $\overline{AB}$.
7. Hacer clic derecho sobre el punto **M** y seleccionar **Mostrar rastro**.



8. Seleccionar la herramienta **Mueve** y arrastrar el punto **A** a lo largo de la recta **r**, o el punto **B** a lo largo de la recta **s**. Observar el rastro que va dejando **M** al moverse.

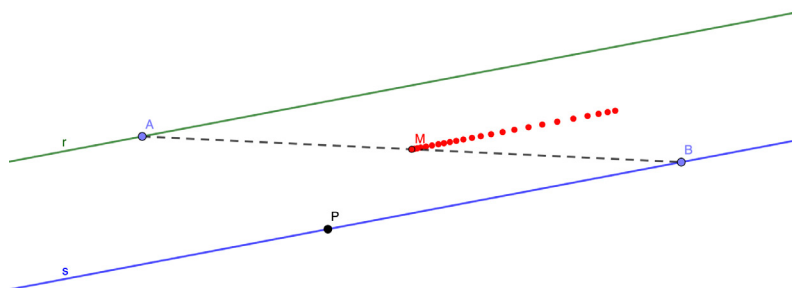


Figura 1.8. Rastro del punto medio M del segmento $\overline{AB}$.

Preguntas para la reflexión:

- a) Observación:** ¿Qué figura dibuja el rastro del punto **M** al mover **A** sobre **r** y **B** sobre **s**? ¿Es paralela a las rectas iniciales? ¿En qué posición se ubica respecto a **r** y **s**?
- b) Comprensión:** ¿Por qué el punto medio de un segmento que une dos rectas paralelas describe a su vez una recta paralela? ¿Qué relación hay entre la distancia de esa recta a **r** y a **s**?
- c) Conjetura:** Si en lugar del punto medio se tomara un punto que divide a en razón 1:2, ¿qué figura cree que dibujaría su rastro? ¿Y si las dos rectas iniciales se intersecan en un punto **V** en lugar de ser paralelas? ¿Cómo cambiaría la trayectoria descrita por **M**?

Síntesis del apartado

Los tres ejemplos presentados ilustran maneras complementarias en que GeoGebra contribuye al aprendizaje de la geometría. La construcción condicionada muestra que una figura puede generarse de modo que sus propiedades sean consecuencia necesaria del procedimiento, no resultado de la apariencia. La prueba de arrastre convierte la





deformación dinámica en un argumento: lo que se conserva al deformar es lo que verdaderamente define a la figura. El rastro de un punto en movimiento revela trayectorias y lugares geométricos al hacer visible el conjunto de todas las posiciones que satisfacen una condición, transformando una idea abstracta en una experiencia perceptible. De manera que, en conjunto, estas tres actividades ilustran que GeoGebra no se limita a representar figuras, sino que ofrece al docente una herramienta para producir condiciones de aprendizaje centradas en la observación de invariantes, la formulación de conjeturas y la justificación de propiedades.

Este primer capítulo ha buscado situar al docente ante una mirada renovada sobre la enseñanza de la geometría escolar, articulada en torno a cuatro ideas que se irán desarrollando a lo largo del libro.

La primera es la conciencia de la brecha entre el currículo prescrito y el currículo enseñado. La geometría suele ocupar un lugar marginal en la práctica de aula, no por debilidad de los documentos curriculares, sino por las decisiones cotidianas que toma el docente al seleccionar tareas, distribuir tiempos y definir lo que se evalúa. Cerrar esa brecha exige reconocerla como objeto de reflexión profesional.

La segunda es la propuesta de pensar el aprendizaje geométrico como un campo articulado en cuatro dimensiones complementarias: visualización, construcción, argumentación y modelación. Cada una aporta un modo de aprender y una exigencia didáctica distinta, y en conjunto desplazan la enseñanza desde el reconocimiento de figuras hacia el análisis de relaciones.

La tercera es el reconocimiento del fenómeno del prototipo y del estatuto de la definición. El estudiante no abandona la percepción visual, sino que aprende a reorganizarla en torno a propiedades invariantes.

Las definiciones, lejos de ser frases para memorizar, se vuelven herramientas activas de identificación, clasificación y justificación.

La cuarta es la incorporación de GeoGebra como herramienta integradora, capaz de articular en un mismo entorno las cuatro dimensiones del aprendizaje geométrico. La función de arrastre, en particular, ofrece un dispositivo único para hacer visibles los invariantes y para fundar argumentaciones que el dibujo estático no permite sostener.

Concebir la geometría escolar desde esta mirada implica reconocer que enseñar geometría no consiste solo en transmitir contenidos, sino en organizar experiencias en las que los estudiantes puedan observar con sentido, construir bajo condiciones, comparar representaciones, formular conjeturas y justificar relaciones. Las figuras, las tareas, las preguntas del docente y herramientas como GeoGebra forman parte de una misma arquitectura didáctica, que los capítulos siguientes desarrollarán a partir de contenidos geométricos específicos.

Preguntas para la reflexión docente

Las ideas presentadas en este capítulo cobran sentido pleno cuando el docente las contrasta con su propia práctica. Las siguientes preguntas están pensadas para abrir esa reflexión y pueden retomarse, individualmente o en colectivo, antes de avanzar hacia los capítulos siguientes.

Sobre el lugar de la geometría en la enseñanza:

1. ¿Qué peso real tiene la geometría en mi planificación anual frente a otros bloques de la matemática? ¿Coincide con lo que el currículo prescribe?
2. ¿Qué decisiones cotidianas tomo que pueden estar contribuyendo a la brecha entre el currículo prescrito y el currículo enseñado?





Sobre el reconocimiento de figuras:

1. Cuando mis estudiantes reconocen una figura, ¿lo hacen por sus propiedades o por su apariencia?
2. ¿Cómo suelo intervenir cuando un estudiante identifica incorrectamente una figura por su orientación o por su forma prototípica?
3. ¿Uso las figuras solo para ilustrar contenidos o también para provocar discusión y reflexión?

Sobre las dimensiones del trabajo geométrico:

1. ¿Mis clases de geometría favorecen solo el reconocimiento y el cálculo, o también la construcción, la comparación y la argumentación?
2. ¿Qué oportunidades reales ofrezco para que los estudiantes expliquen por qué una figura conserva ciertas propiedades?
3. ¿Qué tipo de tareas propongo para que los estudiantes pasen de la percepción a la comprensión geométrica?

Sobre el papel de las definiciones:

1. ¿Trato las definiciones geométricas como frases para memorizar o como herramientas para identificar, comparar y justificar?
2. ¿Mis estudiantes pueden usar una definición para construir un contraejemplo o para decidir si una figura cumple o no con ella?

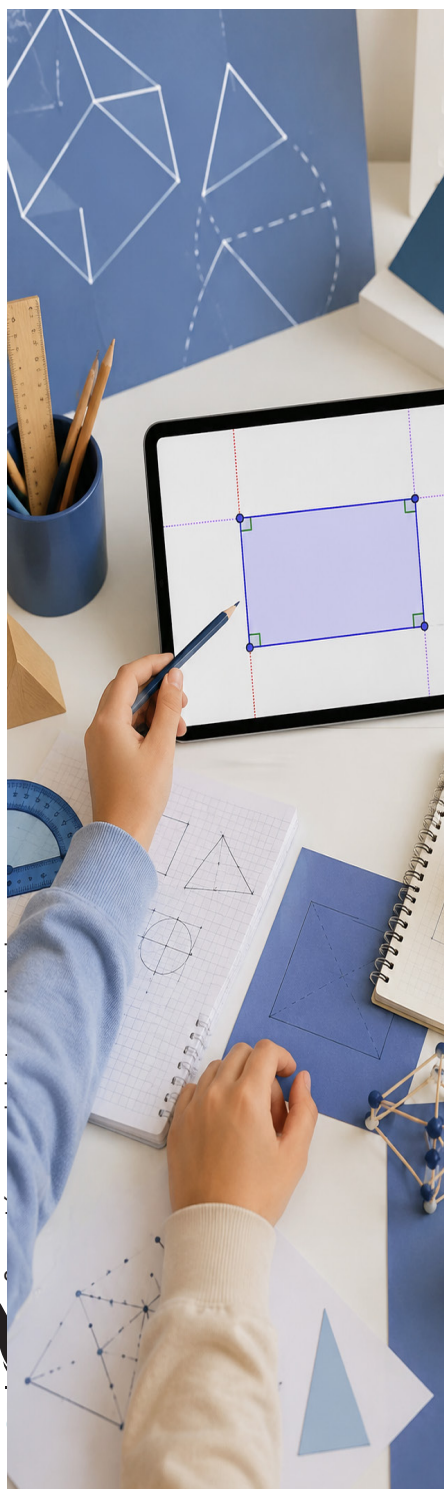
Sobre el uso de GeoGebra:

1. ¿Cómo podría aprovechar GeoGebra para hacer visibles los invariantes y no solo para mostrar construcciones terminadas?
2. ¿Qué cambios necesitaría hacer en mi práctica docente para enseñar geometría como un campo de observación, relación y justificación?

Por último, le proponemos cerrar este capítulo con un ejercicio concreto. Tome una actividad de su planificación habitual sobre figuras geométricas y analícela respondiendo:

1. ¿Qué le exige realmente al estudiante?
2. ¿Promueve el reconocimiento visual o la comprensión de propiedades?
3. ¿Qué preguntas podrían incorporarse para favorecer la observación, la comprensión y la conjetura?
4. ¿Qué figura o construcción en GeoGebra podría enriquecerla?





02.

Desarrollo del pensamiento geométrico

2.1. Por qué hablar de desarrollo del pensamiento geométrico

Enseñar geometría no consiste solo en presentar contenidos en un cierto orden. Implica también comprender cómo piensan geoméricamente los estudiantes y qué tipo de experiencias les permiten avanzar. Este capítulo se apoya en la teoría de Van Hiele, según la cual el razonamiento geométrico progresa por niveles, cada uno con su propio lenguaje, sus formas de reconocimiento y sus modos de justificación. La teoría plantea, además, que ese progreso depende en gran medida de la instrucción, más que de la edad por sí sola, y que el paso de un nivel a otro puede favorecerse mediante fases

de aprendizaje: información, orientación guiada, explicitación, orientación libre e integración.

Esta perspectiva resulta especialmente útil para una obra dirigida a docentes, porque ayuda a interpretar por qué una misma explicación no produce el mismo efecto en todos los estudiantes, por qué ciertas definiciones llegan demasiado pronto o por qué algunos alumnos pueden identificar una figura, pero no establecer relaciones entre sus propiedades. La teoría también dialoga con enfoques de enseñanza que promueven la actividad estudiantil, la diversidad de procesos cognitivos y el uso pedagógico de las tecnologías digitales.

En este marco, GeoGebra puede funcionar no solo como recurso de representación, sino también como mediación que acompaña el tránsito entre niveles de razonamiento, hace visibles las relaciones geométricas y permite al docente ajustar mejor sus intervenciones.

En el capítulo anterior se discutió cómo los estudiantes tienden a reconocer figuras a partir de prototipos visuales y cómo las definiciones, mal entendidas, pueden quedar reducidas a frases para memorizar. Esos fenómenos no son hechos aislados ni errores corregibles con una explicación adicional, sino manifestaciones de niveles de razonamiento geométrico que se construyen progresivamente. Desde la educación matemática se ha señalado que el desarrollo del pensamiento geométrico constituye un proceso complejo, en el cual la visualización, la identificación de propiedades y la construcción de relaciones entre figuras y espacios se van articulando de manera gradual a lo largo de la escolaridad (Battista, 2007; Clements y Battista, 1992). Comprender ese desarrollo es una condición indispensable para diseñar una enseñanza que efectivamente acompañe el aprendizaje del estudiante.

En muchas clases de geometría se asume que, si el contenido fue explicado, el estudiante ya está en condiciones de comprenderlo. Sin embargo, la





experiencia de aula muestra que hay estudiantes que reconocen una figura, pero no pueden definirla; otros enumeran propiedades, pero no ven relaciones entre ellas; y otros aceptan una afirmación si se ve en el dibujo, pero no advierten la necesidad de justificarla. La literatura especializada indica que estas diferencias reflejan distintas formas de organización del pensamiento geométrico y que no se superan simplemente repitiendo explicaciones, sino mediante secuencias de actividades que permitan avanzar desde una percepción global de las figuras hacia comprensiones más analíticas y relacionales (Cortés Velásquez et al., 2024).

Una dificultad frecuente en la enseñanza ocurre cuando el docente imparte sus clases desde un modo de razonamiento más avanzado que el de sus estudiantes. En ese caso, puede creer que está siendo claro, pero en realidad está usando un lenguaje y una red de relaciones que el alumno todavía no ha construido. Diversos trabajos advierten que esta distancia entre la manera en que el profesor estructura los conceptos geométricos y la forma en que los estudiantes los piensan genera incomprensión y fomenta aprendizajes meramente repetitivos, alejados de la construcción de significados propios (Cortés Velásquez et al., 2024).

La figura 2.1 sintetiza esta dificultad: mientras el docente puede formular preguntas desde relaciones, definiciones o justificaciones, el estudiante puede estar razonando todavía desde la apariencia visual, los ejemplos prototípicos o propiedades aisladas. Esta distancia no debe entenderse como falta de capacidad del alumno, sino como una diferencia en el nivel de razonamiento geométrico desde el cual interpreta la situación.



Figura 2.1. Desajuste entre el nivel de enseñanza del docente y el nivel de razonamiento geométrico del estudiante.

- **Ejemplo 1.** El docente pregunta: ¿por qué el cuadrado es un rectángulo? El estudiante responde: No puede ser, porque el cuadrado tiene todos los lados iguales y el rectángulo no.

Esta respuesta no debe interpretarse simplemente como un error. Revela que el estudiante aún no razona mediante relaciones de inclusión entre clases de figuras, sino que se guía por imágenes prototípicas y rasgos aislados. La intervención didáctica no debería limitarse a corregir la respuesta, sino a proponer actividades que le permitan comparar propiedades y reconstruir su sistema de clasificación.

- **Ejemplo 2.** El docente pregunta: ¿qué es una altura en un triángulo? El estudiante responde: es una línea que va desde la punta de arriba hasta la base.





La respuesta revela que el estudiante razona desde una imagen prototípica (un triángulo apoyado horizontalmente, con un vértice arriba y dos abajo) y no desde la definición geométrica (segmento perpendicular desde un vértice a la recta que contiene el lado opuesto, válido para los tres vértices del triángulo). El docente, al hablar desde la definición, da por sentadas relaciones que el estudiante todavía no ha construido.

Reconocer que los estudiantes operan en niveles distintos de razonamiento tiene tres consecuencias prácticas para el docente. La primera es que permite interpretar las respuestas inesperadas no como errores aislados, sino como expresiones coherentes de un nivel de razonamiento determinado, lo que abre la posibilidad de intervenir con propósito. La segunda es que ayuda a graduar las tareas: una pregunta que exige razonar por inclusión de clases solo será productiva con estudiantes que ya operan en ese nivel; con otros, conviene preparar el terreno con tareas de comparación, descripción y exploración. La tercera es que orienta el uso del lenguaje: el docente puede aprender a moverse entre el lenguaje informal del estudiante y el lenguaje técnico de la disciplina, evitando saltar bruscamente de uno a otro y propiciando una transición gradual.

Síntesis del apartado

Atender al desarrollo del pensamiento geométrico constituye un requisito de la enseñanza efectiva. Conocer cómo razona el estudiante, qué relaciones puede establecer en un momento dado y cuáles permanecen fuera de su alcance permite ajustar las decisiones didácticas a las posibilidades reales del aprendiz. Sin esa información, las explicaciones del docente, por claras que parezcan desde su propia perspectiva, no encuentran apoyo en el modo de pensar del estudiante, y la repetición no logra suplir esa distancia.

2.2. Los niveles de razonamiento geométrico

La teoría de Van Hiele describe cinco niveles de razonamiento geométrico. Aunque los nombres pueden variar según la bibliografía, la secuencia es la misma: visualización, análisis, abstracción, deducción formal y rigor.

La clave para el docente no está en memorizar estas etapas, sino en comprender que cada nivel implica una forma distinta de ver, un lenguaje específico y una capacidad de razonamiento con límites definidos.

Nivel 0. Visualización: En este nivel, el estudiante reconoce las figuras por su apariencia global. Identifica que un objeto “es un triángulo” porque su forma total coincide con el prototipo mental que posee. El razonamiento es visual y holístico, y no se basa en propiedades.

- **Ejemplo:** Al presentar una colección de triángulos (algunos muy agudos, otros rotados o achataados), el estudiante podría rechazar los casos no convencionales argumentando que “están muy flacos” o “están torcidos” para ser triángulos de verdad.

Intencionalidad didáctica:

En este nivel no es el momento de imponer definiciones formales. Lo más productivo es proponer tareas de observación y clasificación que amplíen la variedad de ejemplos y desafíen los prototipos limitados del alumno.

Nivel 1. Análisis: Aquí el estudiante comienza a “desarmar” la figura para identificar sus componentes y propiedades (lados iguales, ángulos rectos, paralelismo). Sin embargo, percibe las propiedades como una lista de rasgos aislados; todavía no comprende cómo se relacionan entre sí ni cuáles son indispensables.



- **Ejemplo:** Un estudiante puede enumerar que un cuadrado tiene “cuatro lados iguales” y “cuatro ángulos rectos”, pero no advierte que esas mismas propiedades lo integran en la familia de los rectángulos o los rombos. Para él, son categorías aisladas.

Intencionalidad didáctica:

Son fundamentales las tareas de registro y comparación. Se recomienda el uso de tablas de doble entrada para marcar qué propiedades cumple cada figura, lo que prepara el terreno para la clasificación jerárquica.

Nivel 2. Abstracción o deducción informal: En este nivel se produce el gran salto cognitivo: el estudiante empieza a percibir relaciones entre propiedades y entre clases de figuras. Puede construir definiciones con sentido y establecer razonamientos del tipo: “si esta figura tiene estas propiedades, entonces debe pertenecer a este grupo”.

- **Ejemplo:** El estudiante comprende y acepta que todo cuadrado es un rectángulo, porque entiende que el cuadrado cumple con la condición mínima de tener cuatro ángulos rectos.

Intencionalidad didáctica:

Aquí ya tienen sentido preguntas como:

- a) ¿Qué relación hay entre estas dos figuras?
- b) ¿Toda figura con esta propiedad pertenece también a esta otra clase?
- c) ¿Qué propiedad basta para asegurar que una figura sea de cierto tipo?

Nivel 3. Deducción formal: En este nivel, el estudiante ya no depende de la imagen ni de la medición empírica. Comprende el valor de la lógica y puede seguir o producir demostraciones estructuradas, distinguiendo claramente entre hipótesis y conclusión.



- **Ejemplo:** Puede justificar por qué los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes mediante un razonamiento deductivo, sin necesidad de medirlos con un transportador.

Intencionalidad didáctica: Se llega a este nivel solo si hubo un trabajo previo sólido de deducción informal. El rigor no nace de repetir pruebas modelo, sino de la necesidad lógica de validar lo observado.

Nivel 4. Rigor: Se refiere a la capacidad de trabajar con distintos sistemas axiomáticos y con geometrías no euclidianas. En la escolaridad obligatoria, este nivel suele aparecer de forma incipiente o solo en contextos muy específicos.

- **Ejemplo:** Un estudiante en el nivel de rigor comprende que la afirmación “la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° ” no es una verdad absoluta, sino una consecuencia del quinto postulado de Euclides (el postulado de las paralelas). Si se cambia ese postulado, cambia el resultado, en una geometría esférica (sobre la superficie de una esfera), la suma supera los 180° ; en una geometría hiperbólica, es menor que 180° . El estudiante puede entonces analizar y comparar lo que ocurre en cada sistema, reconociendo que la geometría que aprendió en la escuela es solo una de varias posibles.

Intencionalidad didáctica: Para los fines de este libro, el interés principal está en cómo ayudar a los docentes a reconocer y favorecer el paso entre los niveles anteriores, sobre todo los que atraviesan la educación básica y media.

Es importante destacar que estos cinco niveles de Van Hiele no constituyen un esquema rígido ni una clasificación que el docente deba aplicar mecánicamente para etiquetar a sus estudiantes. Son, más bien, una lente interpretativa que permite mirar el aula con mayor profundidad: comprender por qué





dos estudiantes pueden parecer estar de acuerdo y, sin embargo, estar razonando de modos distintos; reconocer que una respuesta inadecuada puede ser, en realidad, coherente con el nivel desde el cual el estudiante interpreta la tarea; y aceptar que ciertas dificultades no se resuelven con más explicaciones, sino con tareas adecuadas al nivel en que se encuentra el aprendiz.

Conviene considerar tres ideas que pueden ser útiles para el trabajo docente. La primera es que los niveles son secuenciales, pero no automáticos: nadie pasa al nivel siguiente sin haber consolidado el anterior, y este tránsito no ocurre por edad ni por exposición pasiva al contenido, sino por la mediación de tareas y experiencias adecuadas. La segunda es que los niveles tienen lenguajes propios, un mismo término geométrico (cuadrado, ángulo, paralelas) puede significar cosas distintas según el nivel desde el cual se lo enuncie, y esa diferencia explica muchos malentendidos cotidianos en el aula. La tercera es que el docente puede operar en niveles superiores a los de sus estudiantes, lo que le permite anticipar el horizonte hacia el cual conducirlos, pero también le exige cuidado: una explicación formulada desde un nivel demasiado alto puede ser ininteligible, aunque parezca clara desde quien la formula.

Para los fines de este libro, el interés práctico se concentra en los tres primeros niveles, visualización, análisis y abstracción, que son los que efectivamente atraviesan la educación básica y media. La deducción formal aparece de manera inicial en los últimos años de la escolaridad, mientras que el rigor pertenece, en general, a etapas posteriores de la formación matemática. Comprender esta distribución ayuda al docente a graduar sus expectativas y a diseñar progresiones realistas, en las que cada tarea esté pensada para consolidar el nivel actual o preparar el tránsito al siguiente.

Síntesis del apartado

La comprensión de los niveles de Van Hiele modifica la orientación de la actividad docente: el trabajo de aula deja de organizarse alrededor de la presentación de temas y se orienta hacia la promoción de procesos de pensamiento. El propósito pedagógico no consiste en acelerar artificialmente el paso de un nivel al siguiente, sino en consolidar cada uno antes de avanzar, asegurando que el estudiante haya explorado sus posibilidades y reconocido sus límites. Esta consolidación supone atender no solo al contenido geométrico que se presenta, sino al tipo de proceso cognitivo que cada tarea exige.

Identificado el nivel desde el cual razona el estudiante y el horizonte hacia el cual conviene orientarlo, resulta necesario precisar qué se transforma efectivamente en su pensamiento cuando avanza de un nivel al inmediato superior. El apartado siguiente describe esos cambios y las señales observables que permiten al docente reconocer y acompañar dicho progreso.

2.3. Qué cambia de un nivel a otro

Identificar los cinco niveles es solo un primer paso. Lo que de verdad permite usar el modelo de Van Hiele en el aula es comprender qué cambia cuando un estudiante avanza de un nivel al siguiente. No se trata de saber más, sino de razonar de otra manera. Cuatro cambios resultan particularmente útiles para el docente, el objeto de pensamiento, el tipo de lenguaje, la manera de justificar y la dependencia de la imagen visual.

- Cambia el objeto de pensamiento: En el nivel 0, lo que el estudiante “piensa” son figuras concretas, vistas como totalidades. En el nivel 1, el objeto de pensamiento son las propiedades de esas figuras (tiene cuatro lados iguales, tiene ángulos rectos). En el nivel 2, lo son las relaciones entre propiedades y entre clases de figuras. En el nivel 3, lo





son las cadenas deductivas, los teoremas y sus demostraciones. En el nivel 4, lo son los sistemas axiomáticos mismos. Lo que en un nivel es objeto de razonamiento, en el nivel anterior era invisible.

- Cambia el lenguaje: Cada nivel tiene su propia forma de decir las cosas. En el nivel 0 se habla de figuras en general (esto es un cuadrado); en el nivel 1, de propiedades (tiene cuatro lados iguales); en el nivel 2, de implicaciones y relaciones (si tiene cuatro ángulos rectos, entonces es un rectángulo); en el nivel 3, de hipótesis, conclusiones, teoremas y demostraciones; en el nivel 4, de axiomas, modelos y sistemas. Esto explica una dificultad de comunicación frecuente en el aula: docente y estudiante usan a veces las mismas palabras, pero con significados que pertenecen a niveles distintos.
- Cambia la manera de justificar: En el nivel 0, una afirmación se acepta si “se ve” en el dibujo. En el nivel 1, si las propiedades enumeradas coinciden con las observadas. En el nivel 2, si se puede establecer una relación entre propiedades conocidas. En el nivel 3, si existe una cadena deductiva válida que la sostenga. En el nivel 4, si es coherente dentro del sistema axiomático en el que se está trabajando. Pedirle a un estudiante una justificación que pertenezca a un nivel superior al suyo no produce comprensión, sino imitación.
- Cambia la dependencia de la imagen visual: En los primeros niveles, la figura es la fuente principal de información: lo que se ve, vale. A medida que se avanza, la figura va perdiendo protagonismo y gana terreno la red de propiedades y relaciones.

En el nivel 3, una afirmación puede sostenerse, aunque la figura particular sugiera lo contrario, porque la justificación se apoya en propiedades generales. En el nivel 4, incluso es posible razonar sobre figuras que no pueden representarse en el plano euclidiano.

Para que estos cambios se interpreten correctamente, es necesario que:

- El avance entre niveles no se da por simple maduración. Van Hiele insistía en que depende, sobre todo, de las experiencias de aprendizaje que el docente proponga; sin enseñanza adecuada, un estudiante puede permanecer años en el mismo nivel.
- Que los niveles son secuenciales y no pueden saltarse. Un estudiante que aún no relaciona propiedades (nivel 2) no puede comprender de manera genuina una demostración formal (nivel 3), por más cuidadosa que sea la exposición del docente.
- Que una de las dificultades más comunes en la enseñanza es que el docente, situado típicamente en niveles 3 o 4, hable a estudiantes que están en niveles 1 o 2. Cuando esto ocurre, el docente cree que está siendo claro, pero el estudiante recibe un mensaje que pertenece a un nivel al que aún no ha llegado.

Reconocer esos cambios y esas advertencias permite al docente tomar dos decisiones importantes, identificar en qué nivel está razonando cada estudiante y diseñar tareas que lo ayuden a transitar hacia el siguiente (Tabla 2.1):



Tabla 2.1. Niveles de razonamiento geométrico según Van Hiele.

Nivel	Denominación	Qué caracteriza este nivel	Ejemplo en el aula
0	Visualización (reconocimiento)	Las figuras se reconocen por su forma global, no por sus partes.	El estudiante identifica un sobre de carta como rectángulo porque “parece una puerta acostada”, pero rechaza un rectángulo muy alargado porque “no se ve como un rectángulo”.
1	Análisis	Se reconocen partes y propiedades de las figuras como rasgos aislados.	El estudiante enumera que un cuadrado tiene cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos, pero no advierte que esas mismas propiedades lo hacen un caso particular de rectángulo o de rombo.
2	Abstracción (deducción informal)	Se establecen relaciones entre propiedades y entre clases de figuras.	El estudiante acepta que “todo cuadrado es un rectángulo” porque reconoce que cumple la condición de tener cuatro ángulos rectos; o deduce que, si un triángulo tiene dos lados iguales, los ángulos opuestos también lo son.
3	Deducción formal	Se comprende la estructura lógica de las demostraciones (si A, entonces B).	El estudiante demuestra que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180° apoyándose en axiomas y teoremas previos, sin depender de un dibujo particular.
4	Rigor	Se trabaja con distintos sistemas axiomáticos y con geometrías no euclidianas.	El estudiante analiza cómo se comportan las rectas paralelas en una superficie esférica, donde el quinto postulado de Euclides no se cumple, y compara los teoremas que resultan en cada sistema.

Síntesis del apartado

El progreso geométrico no consiste en una acumulación lineal de definiciones, sino en una reorganización del modo de razonar sobre las figuras. Identificar los cuatro ejes de cambio: objeto de pensamiento, lenguaje, manera de justificar y dependencia de la imagen visual, permite al docente reconocer en qué nivel se encuentra el estudiante y comprender por qué, en ocasiones, una misma palabra remite a significados distintos para cada uno.

La enseñanza efectiva requiere que el docente medie entre el modo de razonar del estudiante y el lenguaje propio de la disciplina, sin imponer formulaciones a las que el aprendiz aún no ha llegado y sin renunciar al horizonte hacia el cual debe avanzar. Esa mediación no se produce por simple maduración ni por exposición pasiva al contenido: depende de la organización deliberada de la enseñanza, asunto que el siguiente apartado aborda mediante las fases de aprendizaje propuestas por Van Hiele.

2.4. Las fases de aprendizaje y su valor didáctico

Van Hiele no se limitó a describir niveles de razonamiento: también propuso un conjunto de fases de aprendizaje que orientan al docente sobre cómo ayudar a los estudiantes a transitar de un nivel al siguiente. Conviene insistir en una distinción que se presta a confusión: los niveles describen cómo razona el estudiante, mientras que las fases describen cómo organiza el docente la enseñanza. Las cinco fases no corresponden cada una a un nivel; son una secuencia de momentos didácticos que puede recorrerse cada vez que se quiere apoyar el paso de un nivel al siguiente.

Las cinco fases son: información, orientación guiada, explicitación, orientación libre e integración. La figura 2.2 las representa como un ciclo iterativo, porque al alcanzarse el nuevo nivel la secuencia vuelve a



comenzar para apoyar el siguiente avance. Más allá de los nombres, su valor está en ofrecer una estructura para diseñar secuencias didácticas que vayan más allá del “haz clic aquí y construye esto”.

Las cinco fases de aprendizaje de Van Hiele

Ciclo que se repite cada vez que se quiere apoyar el paso de un nivel al siguiente



Figura 2.2. Las cinco fases de aprendizaje de Van Hiele como ciclo iterativo.

Fase 1. Información: El docente presenta el contexto, el tipo de objetos y el lenguaje inicial con el que se va a trabajar. No se trata todavía de formalizar, sino de activar ideas previas y abrir el campo de exploración.

- **Ejemplo.** El docente presenta varias figuras de cuatro lados y pregunta: ¿en qué se parecen?, ¿en qué se diferencian?, ¿qué nombres conocen para estas figuras?

Fase 2. Orientación guiada: El docente propone tareas que ayudan a descubrir relaciones y propiedades, guiando la exploración con consignas específicas. Aquí GeoGebra aporta especialmente, porque permite construir, arrastrar y observar qué se conserva.



- **Actividad con GeoGebra 1:** Construir un rectángulo a partir de un lado y observar lo que ocurre al arrastrar uno de sus vértices.

Objetivo: Identificar las propiedades invariantes de una familia de rectángulos mediante el arrastre.

Idea didáctica: Promover que los estudiantes identifiquen las propiedades invariantes que caracterizan a los rectángulos mediante la construcción dinámica y la prueba de arrastre en GeoGebra. A través de la manipulación de los puntos de control, se busca que reconozcan que, aunque cambien el tamaño o la forma de la figura, se conservan el paralelismo de los lados opuestos y la presencia de cuatro ángulos rectos, favoreciendo así la comprensión de las propiedades que definen a una familia de rectángulos.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Punto**, marcar dos puntos, **A** y **B**, que determinarán el primer lado (Figura 2.3).
2. Con la herramienta **Segmento**, unir los puntos, **A** y **B**.
3. Con la herramienta **Perpendicular** y trazar la recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pase por **A**.
4. Con la herramienta **Punto** y marcar punto sobre esa recta, renómbalo **D**.
5. Con la herramienta **Paralela**, trazar las paralelas necesarias para cerrar la figura, una paralela a $\overline{AD}$ que pase por **B**, y una paralela a $\overline{AB}$ que pase por **D**.
6. Con la herramienta **Intersección**, marcar el punto donde se intersecan las dos paralelas, renombrarlo como **C**.
7. Con la herramienta **Polígono**, construir el polígono **ABCD**.
8. Con la herramienta **Distancia** o **Longitud**, medir los cuatro lados del polígono **ABCD**.



9. Con la herramienta **Ángulo**, medir las amplitudes de los cuatro ángulos internos del polígono **ABCD** (puedes hacer un solo clic al interior del polígono).
10. Con la herramienta **Mueve**, arrastrar **B** o **D** y observar qué cambia y qué se conserva.

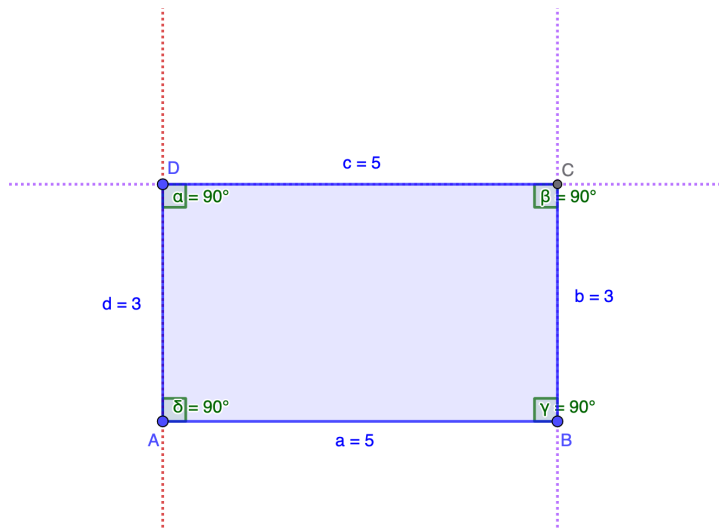


Figura 2.3. Construcción de un rectángulo a partir de un lado.

Preguntas para la reflexión:

- a) **Observación:** ¿Qué cambia y qué permanece igual al arrastrar los puntos del rectángulo? ¿Cómo se comportan los lados y los ángulos?
- b) **Comprensión:** ¿Por qué la figura sigue siendo un rectángulo, aunque cambie su tamaño o forma? ¿Qué propiedades son esenciales para definirlo?
- c) **Conjetura:** ¿Qué ocurriría si uno de los ángulos dejara de ser recto? ¿Seguiría siendo un rectángulo? ¿Qué otras figuras podrían obtenerse al modificar las condiciones de construcción?

Preguntas para los estudiantes. Al arrastrar, ¿qué medidas cambian y cuáles permanecen iguales?, ¿por qué la figura sigue siendo un rectángulo?, ¿qué decisiones de la construcción aseguran que esa propiedad se conserve?

Fase 3. Explicitación: Los estudiantes expresan y discuten lo que descubrieron, y el docente introduce o precisa el lenguaje matemático formal a partir de sus observaciones. Van Hiele subrayaba que la terminología resulta más productiva cuando surge después de la exploración que cuando se impone antes de ella.

- **Ejemplo.** Tras la actividad anterior, el docente recoge las observaciones del grupo y guía una síntesis colectiva con disparadores como: “hemos observado que...”, “podemos decir entonces que un rectángulo es...”, “las propiedades que siempre se conservaron fueron...”.

Fase 4. Orientación libre. El docente propone tareas más abiertas, en las que el estudiante debe usar las relaciones construidas para resolver situaciones nuevas. Se trata de que aplique lo aprendido sin instrucciones paso a paso.

- **Ejemplo.** Pedir a los estudiantes que: construyan una figura de cuatro lados iguales que no sea un cuadrado; construyan un cuadrilátero con diagonales perpendiculares; decidan cuáles de las figuras construidas son también paralelogramos y expliquen por qué.

Fase 5. Integración: Se sistematiza lo aprendido. No se introducen ideas nuevas: se organiza y resume el campo trabajado, de modo que los estudiantes vean las relaciones que han construido como una red coherente. Es el momento en que el nuevo nivel de razonamiento queda consolidado y disponible para apoyar futuros aprendizajes.

- **Ejemplo.** El grupo elabora un mapa o un esquema con las familias de cuadriláteros estudiadas, sus propiedades y las relaciones de inclusión entre ellas (todo cuadrado es un rectángulo, todo rectángulo es un paralelogramo, etc.).

El valor didáctico de estas fases está en que ofrecen criterios para distribuir el trabajo de aula a lo largo





de una secuencia, en lugar de concentrar toda la enseñanza en la presentación del docente. Cuando se diseñan actividades con GeoGebra, las fases ayudan a evitar dos extremos frecuentes, el uso del software como mera ilustración (donde el docente construye y el estudiante observa) y el uso como tarea ejecutiva (donde el estudiante sigue pasos sin comprender qué relaciones está construyendo).

Síntesis del apartado

Las fases de Van Hiele no constituyen una secuencia rígida ni un esquema cerrado, sino un instrumento para organizar la enseñanza. Su aporte principal consiste en desplazar el foco del aula desde la exposición del docente hacia la actividad cognitiva del estudiante, distribuyendo el trabajo en momentos diferenciados de exploración, sistematización y aplicación. Dentro de ese ciclo, GeoGebra cumple una función específica: permite examinar las propiedades geométricas mediante construcción y arrastre, en lugar de presentarlas de manera estática para su sola memorización.

El valor de una secuencia didáctica no se determina por la complejidad técnica de las construcciones realizadas, sino por la consistencia del razonamiento que los estudiantes desarrollan durante la fase de explicitación y por la autonomía que demuestran en la orientación libre. Establecidos los niveles y las fases, resta examinar las consecuencias que este marco tiene para la planificación de la enseñanza y la evaluación del aprendizaje, asunto que aborda el apartado siguiente.

2.5. Implicaciones para la planificación y la evaluación

La teoría de Van Hiele no constituye solo un marco descriptivo del desarrollo del pensamiento geométrico, sino que, ofrece al docente orientaciones concretas para tomar decisiones sobre qué enseñar, en qué orden, con qué tareas y bajo qué criterios evaluar.

La primera es el respeto a la secuencialidad cognitiva. Los niveles de Van Hiele son jerárquicos y, según la formulación original, también discontinuos, el paso de un nivel al siguiente no se produce por simple acumulación de información, sino por una reorganización del modo de pensar la figura. Esta característica tiene una consecuencia didáctica directa, no conviene exigir razonamientos propios de un nivel que aún no ha sido preparado. Pedir demostraciones formales o clasificaciones jerárquicas a estudiantes que todavía operan con la apariencia visual conlleva la memorización mecánica de definiciones, y en el peor, el rechazo hacia la materia. Van Hiele advertía además que, cuando docente y estudiantes razonan en niveles distintos, las mismas palabras, lado, ángulo, rectángulo, remiten a objetos mentales diferentes y la comunicación se vuelve solo aparente.

Resulta necesario verificar que el lenguaje empleado en clase efectivamente conecte con el modo de pensar de los estudiantes, y no que estos repitan formulaciones cuyo sentido aún no han construido. A este principio se añade una segunda consideración propia del modelo; dentro de cada nivel, el aprendizaje atraviesa diferentes fases (información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración) que organizan el trabajo didáctico. Planificar en correspondencia con el modelo de Van Hiele no consiste solo en decidir el nivel objetivo, sino en diseñar trayectos de actividades que permitan a los estudiantes explorar, sistematizar y aplicar lo aprendido antes de considerar consolidado el avance.

- **Ejemplo.** Imagine un docente de quinto de básica que introduce los triángulos pidiendo a sus estudiantes que demuestren que la suma de los ángulos internos es 180° , utilizando el postulado de las paralelas y los ángulos alternos internos. Los estudiantes, que aún reconocen los triángulos por su apariencia (este es triángulo porque parece una montaña), terminan copiando la demostración del pizarrón sin entender qué se está probando ni por





qué. Aquí el docente está exigiendo razonamiento de nivel 3 (deducción formal) a estudiantes que operan en el nivel 1 (visual). Una decisión coherente con Van Hiele sería primero medir y comparar los ángulos de muchos triángulos distintos recortados en cartulina, descubrir empíricamente la regularidad. Más adelante, cuando ya manejen las propiedades como objeto de razonamiento, introducir la justificación deductiva. La diferencia no está en el contenido que sigue siendo los ángulos del triángulo, sino en el tipo de pensamiento que se le pide al estudiante.

La segunda tiene que ver con el diseño deliberado de las tareas, ya que, en la planificación, la tarea importa tanto como el contenido. Dos actividades sobre el mismo tema, por ejemplo, los cuadriláteros, pueden movilizar niveles de pensamiento muy distintos según lo que se pida al estudiante. Por ejemplo, identificar una figura entre varias, describir sus propiedades, relacionar familias de figuras o justificar deductivamente una afirmación. El verbo de la consigna, más que el contenido, define la demanda cognitiva. Esta constatación tiene una consecuencia práctica directa: el docente puede regular intencionalmente el nivel de razonamiento al que invita a sus estudiantes, alternando tareas que consoliden el nivel actual con otras que tensionen, de manera controlada, el paso al siguiente. Conviene además vigilar un fenómeno frecuente: la tendencia a rebajar el nivel de las tareas para asegurar que todos respondan correctamente, lo que protege la fluidez de la clase, pero detiene el avance cognitivo.

- **Ejemplo.** Considere el tema cuadrilátero. El docente puede plantear cuatro consignas distintas, todas legítimas, pero cada una activa un nivel diferente:

a) Encierra en rojo los rombos de esta hoja → nivel 1: reconocimiento por apariencia.

- b) Mide los lados y los ángulos de este rombo y anota lo que observas → nivel 2: análisis de propiedades.
- c) ¿Todo cuadrado es un rombo? ¿Por qué? → nivel 3: relaciones entre clases de figuras.
- d) Demuestra, a partir de las propiedades de las diagonales, que un cuadrilátero con diagonales perpendiculares que se bisecan es un rombo → nivel 4: deducción formal.

El error frecuente es pensar que basta con ver cuadriláteros para que el aprendizaje progrese. El docente que planifica con Van Hiele alterna deliberadamente estas consignas, y resiste la tentación de rebajarlas cuando el grupo se atasca, porque es justamente esa tensión la que produce el avance.

La tercera es la evaluación se relaciona con el razonamiento, en tanto que, evaluar geometría no debería reducirse a comprobar respuestas correctas. Desde la perspectiva de Van Hiele, una respuesta acertada puede provenir de niveles muy distintos de razonamiento, y una respuesta incorrecta puede contener, en cambio, indicios valiosos de transición. Importa observar qué tipo de lenguaje usa el estudiante, en qué se apoya para responder si en la apariencia visual, en propiedades reconocidas o en relaciones lógicas y si es capaz de articular esas propiedades entre figuras distintas. Este desplazamiento del foco evaluativo, desde el producto hacia el modo de pensar que lo sostiene, exige instrumentos sensibles a esa diferencia: preguntas abiertas que pidan justificación, situaciones de clasificación, contraejemplos y tareas en las que la respuesta correcta dependa de un razonamiento y no del reconocimiento de un caso prototípico.

- **Ejemplo.** Suponga que en una prueba el docente pregunta: ¿El siguiente cuadrilátero es un trapecio?, mostrando un paralelogramo. Dos estudiantes responden no. Si solo se corrigiera por



respuesta correcta o incorrecta, ambos obtendrían lo mismo. Pero al pedir justificación aparecen razonamientos muy distintos:

- a) Estudiante A: No, porque un trapecio tiene forma como de balde, y este no se parece. → Razonamiento visual (nivel 1).
- b) Estudiante B: No, porque un trapecio tiene solo un par de lados paralelos, y este tiene dos pares. → Razonamiento por propiedades (nivel 2), aplicando la definición exclusiva de trapecio.
- c) Estudiante C, en cambio, responde sí, porque tiene al menos un par de lados paralelos, y eso basta para que sea trapecio según la definición inclusiva. → Razonamiento relacional (nivel 3).

Aunque dos respuestas coincidan en el 'no', lo que el docente debe hacer con cada estudiante es distinto: con A, trabajar el desprendimiento del prototipo; con B, discutir las definiciones inclusivas y exclusivas; con C, proponer tareas que ya requieran encadenamientos deductivos. La evaluación deja de ser un veredicto y se convierte en un diagnóstico de la trayectoria cognitiva.

Síntesis del apartado

Las tres orientaciones desarrolladas respecto a la secuencialidad cognitiva, diseño deliberado de las tareas y evaluación atenta al razonamiento configuran un modo de operar coherente con el modelo de Van Hiele y con enfoques curriculares que priorizan procesos como identificar, analizar, razonar, explicar y crear, frente a la mera ejecución de procedimientos rutinarios. Su adopción exige al docente una reorientación en la lectura del aula: las respuestas del estudiante dejan de evaluarse únicamente como aciertos o errores y se interpretan como manifestaciones de un determinado nivel de razonamiento, lo que habilita intervenciones didácticas con propósito explícito.



La teoría de Van Hiele permite comprender por qué los estudiantes no avanzan en geometría por el solo hecho de que un tema haya sido explicado. El razonamiento geométrico progresa por niveles cualitativamente distintos, y cada nivel supone un objeto de pensamiento, un lenguaje y una manera de justificar diferentes. Cuando docente y estudiantes operan en niveles distintos, las mismas palabras pueden remitir a significados diferentes y la comunicación, aunque parezca clara, resulta solo aparente.

El capítulo ha desarrollado cuatro ideas que conviene retener. Primero, los niveles describen cómo razona el estudiante, desde el reconocimiento visual hasta la deducción formal. Segundo, el avance de un nivel al siguiente supone cambios específicos en el objeto de pensamiento, el lenguaje, la justificación y la dependencia de la imagen visual; identificar esos cambios ayuda al docente a interpretar las respuestas de aula con mayor precisión. Tercero, las fases de aprendizaje información, orientación guiada, explicitación, orientación libre e integración ofrecen una estructura para organizar la enseñanza, distinta de los niveles, aplicable cada vez que se busca apoyar el paso al nivel siguiente. Cuarto, este marco tiene implicaciones concretas para la planificación y la evaluación: la planificación debe regular intencionalmente la demanda cognitiva de las tareas, y la evaluación debe atender al modo de razonar del estudiante, no solo a la corrección de la respuesta.

En este marco, GeoGebra adquiere un papel específico ya que no funciona como recurso ilustrativo de figuras estáticas, sino como mediación didáctica entre los distintos niveles de razonamiento. Una construcción dinámica adecuadamente planteada permite, por ejemplo, arrastrar un vértice y observar qué propiedades se conservan y cuáles cambian, lo que vuelve visibles los invariantes que sostienen una definición geométrica. También permite generar contraejemplos en tiempo real cuando el razonamiento se apoya únicamente en la apariencia, y favorece el paso del reconocimiento

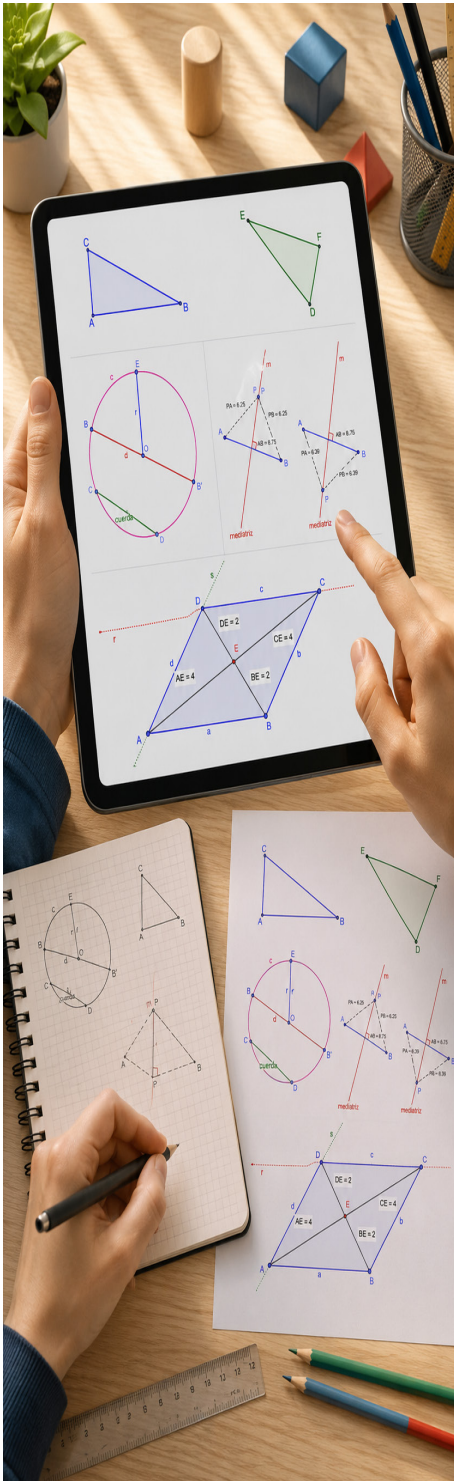


aislado al análisis sistemático de propiedades. Su aporte no consiste en acelerar respuestas, sino en sostener progresiones más conscientes entre reconocimiento, análisis, relación y justificación, ofreciendo al docente un espacio observable en el que intervenir según el modo de pensar de sus estudiantes.

Preguntas para la reflexión docente

1. Cuando enseño geometría, ¿qué tipo de razonamiento exijo realmente a mis estudiantes: reconocimiento, descripción, relación o justificación?
2. ¿En qué momentos de mi práctica hablo desde un nivel de razonamiento que mis estudiantes todavía no han construido?
3. ¿Qué errores frecuentes de mis estudiantes podrían reinterpretarse a la luz de los niveles de Van Hiele?
4. ¿Mis actividades permiten pasar de la apariencia a las propiedades y de las propiedades a las relaciones?
5. ¿Cómo podría reorganizar una clase habitual sobre cuadriláteros o triángulos siguiendo las fases de información, orientación guiada, explicitación, orientación libre e integración?
6. ¿Qué papel podría cumplir GeoGebra en ese recorrido sin convertirse en una demostración visual cerrada?
7. ¿Qué evidencias tomaría en cuenta para evaluar el nivel de razonamiento geométrico de mis estudiantes y no solo si aciertan la respuesta?





Parte II. La intervención docente y el diseño de tareas

03.

**Representación,
visualización y
comprensión**

3.1. El objeto geométrico y su representación

Uno de los aportes más importantes de la didáctica de la matemática ha sido mostrar que, en geometría, comprender no equivale simplemente a ver. Un estudiante puede observar una figura, reconocerla e incluso reproducirla sin comprender las relaciones matemáticas que esa figura pone en juego. Desde la teoría de los registros de representación semiótica, Raymond Duval sostiene que la actividad matemática depende de representaciones y que la comprensión exige no solo operar dentro de un registro, sino también coordinar varios registros y pasar de uno a otro con sentido (Duval, 2006).



Esta distinción es especialmente importante en la enseñanza de la geometría, donde el dibujo suele ocupar un lugar dominante y, al mismo tiempo, puede convertirse en fuente de equívocos si se lo confunde con el objeto geométrico mismo. Por eso, en este capítulo se analizarán los registros verbal, figural, simbólico y dinámico-digital, así como las conversiones que permiten pasar de una representación a otra. En este marco, GeoGebra no aparece únicamente como software de apoyo, sino como un entorno que permite poner en relación la percepción, la construcción, el lenguaje y la simbolización.

Una dificultad recurrente en la enseñanza de la geometría surge al identificar el objeto geométrico con su dibujo. El estudiante suele asumir que el objeto matemático coincide exactamente con la imagen física que observa en su cuaderno o pantalla. Sin embargo, el dibujo es solo una representación parcial y contingente.

Mientras que el dibujo posee rasgos accidentales (tamaño, grosor del trazo, color u orientación), el objeto geométrico es un ente ideal definido exclusivamente por propiedades y relaciones lógicas. Según la perspectiva de Raymond Duval, la comprensión geométrica real ocurre cuando el sujeto distingue el objeto de su representación y no se queda atrapado en la aprehensión perceptiva.

- **Ejemplo.** El obstáculo de la orientación

El docente dibuja en la pizarra dos triángulos rectángulos (Figura 3.1), uno en posición estándar (con los catetos paralelos a los bordes de la pizarra) y otro rotado sobre su hipotenusa. Al preguntar si ambos son el mismo tipo de triángulo, muchos estudiantes responden negativamente, argumentando que el segundo está inclinado o que es un triángulo diferente porque no tiene una base horizontal.

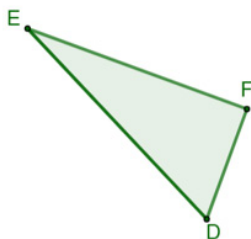
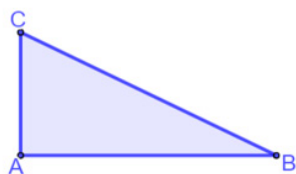


Figura 3.1. Comparación de triángulos rectángulos en posición estándar y no convencional para ilustrar el obstáculo de la orientación.

En este caso, el estudiante enfrenta un obstáculo didáctico y es que ha asociado el concepto de triángulo rectángulo con un prototipo visual estático. Por ello, cuando la figura aparece en una posición no habitual, deja de reconocerla como perteneciente a esa clase.

- El objeto: un polígono de tres lados con un ángulo de 90° , es decir, una propiedad invariante.
- La representación: una imagen que, al ser rotada, deja de coincidir con el modelo mental memorizado por el alumno.

El problema no es de visión, sino de lectura geométrica de la figura. El estudiante no logra realizar una aprehensión operativa, que le permitiría modificar mentalmente la posición de la figura, ni una aprehensión discursiva, que le permitiría identificar el ángulo recto independientemente de su orientación.

La situación permite trabajar una idea importante, cambiar la orientación no modifica el objeto geométrico. Lo que cambia es la representación, no la definición ni las propiedades esenciales.

Preguntas que el docente puede formular que ayuden al estudiante a pasar de la aprehensión perceptiva a la aprehensión discursiva:

- a) Modificación de propiedades: ¿Qué rasgos del dibujo podríamos cambiar sin que el triángulo deje de ser rectángulo? Esto ayuda a separar los atributos



irrelevantes (color, tamaño, posición) de los atributos críticos (el ángulo de 90°). Si el alumno responde, podemos cambiar la posición, está validando la invarianza del objeto.

- b) Desmontando el prototipo: Si giramos el triángulo 45° , ¿estamos creando un objeto nuevo o simplemente una vista diferente del mismo objeto? Aquí confronta directamente la idea de que la orientación es una propiedad definitoria.
- c) Búsqueda de invariantes: Independientemente de cómo lo apoyemos en la pizarra, ¿qué característica garantiza que siempre sea un triángulo rectángulo? En este caso el docente dirige la atención explícitamente hacia el ángulo recto como el único elemento que define la identidad de la figura, forzando al estudiante a buscar el dato geométrico por encima del aspecto visual.
- d) Pregunta metacognitiva: ¿Es posible que un triángulo sea rectángulo si ninguno de sus lados es horizontal ni vertical? De lo que se trata es de romper el vínculo mental entre ángulo recto y los ejes de la hoja o pizarra.

- **Ejemplo.** Actividad de exploración dinámica en GeoGebra

Para trascender la aprehensión perceptiva, se propone una actividad práctica que utiliza la variación como estrategia de aprendizaje. La intención es que el estudiante observe que una figura puede cambiar de posición y tamaño sin perder sus propiedades geométricas invariantes.

Síntesis del apartado

Reconocer que el dibujo no es el objeto geométrico constituye una de las distinciones fundamentales del aprendizaje de la geometría. Mientras la representación gráfica posee atributos contingentes tamaño, posición, orientación, el objeto matemático se define por



propiedades invariantes y relaciones lógicas. Cuando el estudiante queda atrapado en la aprehensión perceptiva, los rasgos accidentales del dibujo terminan funcionando como criterios de identidad y bloquean la lectura geométrica de la figura. Superar este obstáculo no depende de mostrar más imágenes, sino de orientar la mirada hacia aquello que permanece. En esa transición de lo que se ve a lo que se comprende reside la primera tarea didáctica de la enseñanza geométrica.

3.2. Los registros de representación semiótica en geometría

Desde la teoría de los registros de representación semiótica, Raymond Duval sostiene que la comprensión matemática no se reduce a reconocer una representación, sino que exige coordinar distintos registros y pasar de uno a otro con sentido. En geometría, esta idea resulta especialmente importante, porque una misma figura puede ser vista, descrita, simbolizada, construida y manipulada de diferentes maneras. Comprender un objeto geométrico implica reconocer qué permanece constante a través de esas representaciones.

En este sentido, la construcción del conocimiento geométrico depende de la coordinación entre diversos registros.

- Registro figural o gráfico. Comprende dibujos, esquemas, diagramas y construcciones geométricas. Es fundamental para la visualización, pero también puede generar dificultades cuando el estudiante se queda solo con la apariencia de la figura o con prototipos visuales rígidos.
- **Ejemplo.** Un cuadrado rotado 45° puede ser clasificado erróneamente como rombo, excluyéndolo de la categoría de cuadrado, porque el estudiante se apoya en una aprehensión perceptiva global en lugar de analizar sus propiedades.





- Registro verbal. Permite describir, definir, explicar y argumentar. Este registro dota de sentido a la imagen, porque ayuda a expresar las propiedades que no siempre son evidentes en el dibujo.
 - **Ejemplo.** Pasar de una descripción visual como “parece una caja” a una definición geométrica como “es un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos y cuatro lados de igual longitud”.
- Registro simbólico. Utiliza notaciones, fórmulas, expresiones algebraicas y terminología matemática. Permite representar relaciones de manera precisa y operar con ellas.
 - **Ejemplo.** Expresar la relación entre los lados de un triángulo rectángulo mediante el teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$
- Registro dinámico-digital. En entornos como GeoGebra, la representación no es solo una imagen fija, sino una construcción manipulable. Este registro permite arrastrar puntos, modificar medidas, observar invariantes y relacionar lo que cambia en la figura con lo que se actualiza en la vista algebraica. Por ello, puede entenderse como un entorno privilegiado para coordinar lo figural, lo simbólico y lo verbal.
 - **Ejemplo con GeoGebra.** Una circunferencia construida en GeoGebra a partir de un centro y un radio controlado por un deslizador cambia de tamaño cuando se modifica el valor del radio, pero conserva la propiedad que la define: todos sus puntos permanecen a la misma distancia del centro. Al mismo tiempo, su ecuación se actualiza en la vista algebraica.
 - **Ejemplo articulador.** la circunferencia en distintos registros.

El concepto de circunferencia permite observar con claridad cómo un mismo objeto geométrico puede representarse en diferentes registros.

- Registro verbal: una circunferencia puede definirse como el lugar geométrico de los puntos del plano que están a una misma distancia r , llamada radio, de un punto fijo llamado centro.
- Registro figural: la circunferencia se representa como una curva cerrada y simétrica en el plano. En la Figura 3.2 pueden identificarse elementos como el centro, el radio, el diámetro o una cuerda.

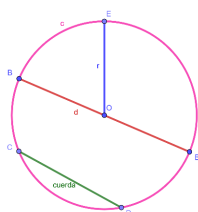


Figura 3.2. Circunferencia y elementos.

- Registro simbólico: si el centro de la circunferencia es $O(h,k)$ y el radio es r , su ecuación es: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$. Si el centro está en el origen, la expresión se simplifica a: $x^2 + y^2 = r^2$.
- Registro dinámico-digital: en GeoGebra, la circunferencia puede construirse a partir de un centro y un radio controlado por un deslizador. Al modificar el valor del radio, la figura crece o decrece, pero conserva la propiedad fundamental, todos sus puntos permanecen a la misma distancia del centro. Al mismo tiempo, la ecuación de la circunferencia se actualiza en la vista algebraica (Figura 3.3).



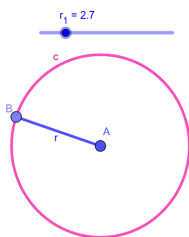


Figura 3.3. Construcción dinámica de una circunferencia en GeoGebra.

Nota: El radio está controlado por un deslizador (r); al modificarlo, la figura cambia de tamaño, pero conserva la propiedad de equidistancia, y la ecuación se actualiza en la vista algebraica.

Este ejemplo muestra que comprender la circunferencia no consiste solo en reconocer su forma. Implica coordinar su definición verbal, su representación figural, su expresión simbólica y su comportamiento dinámico. En otras palabras, el estudiante comprende mejor el objeto cuando puede pasar de una representación a otra y reconocer que todas remiten a la misma relación geométrica, la distancia constante entre el centro y los puntos de la circunferencia.

En este proceso, GeoGebra no funciona únicamente como una herramienta de visualización. Su valor didáctico está en que permite realizar tratamientos dentro de un registro, por ejemplo, modificar dinámicamente el radio. Asimismo, realizar conversiones entre registros, por ejemplo, observar cómo el cambio en la figura se refleja en la ecuación algebraica. Así, el registro dinámico-digital ayuda a que la visualización se articule con el lenguaje, la simbolización y el razonamiento geométrico.

Síntesis del apartado

La comprensión geométrica no se alcanza dentro de un único registro, sino en la articulación entre varios. El registro figural ofrece visualización; el verbal, sentido; el simbólico, precisión; y el dinámico-digital, exploración



y movimiento. El ejemplo de la circunferencia muestra que un mismo objeto puede ser definido, dibujado, simbolizado y construido, y que su comprensión depende de la capacidad del estudiante para reconocer la relación geométrica común a todas esas representaciones. Comprender, en este marco, es coordinar y convertir, no solo identificar. Por ello, planificar la enseñanza desde la teoría de Duval supone diseñar tareas que exijan al estudiante moverse entre registros con sentido matemático.

3.3. GeoGebra como mediador entre registros

Una vez identificados los registros de representación, el problema didáctico consiste en diseñar tareas que permitan al estudiante coordinarlos. En este sentido, GeoGebra puede funcionar como mediador entre registros, porque permite que una construcción sea vista, medida, arrastrada, descrita y expresada simbólicamente. Sin embargo, esta mediación no ocurre por el simple uso del software; depende de la intención de la tarea y de las preguntas que formule el docente.

Para mostrar esta función mediadora, se presentan a continuación dos actividades complementarias. La primera se centra en la mediatriz como lugar geométrico, donde el estudiante debe coordinar el dibujo, el movimiento, la medición y la definición verbal de una propiedad de equidistancia. La segunda aborda las diagonales de un paralelogramo, con el propósito de observar una relación invariante: aunque la figura cambie de forma mediante el arrastre, sus diagonales siguen cortándose en sus puntos medios.

En ambos casos, GeoGebra no se usa únicamente para “ver” una figura, sino para favorecer el tránsito entre registros: del dibujo a la medición, de la medición a la igualdad simbólica y de la igualdad simbólica a la formulación verbal de una propiedad geométrica.





La actividad que presentamos a continuación permite trabajar la mediatriz no solo como una recta perpendicular que interseca a un segmento por la mitad, sino como el conjunto de puntos que cumplen una condición geométrica, estar a la misma distancia de los extremos de un segmento. Esta perspectiva permite que el estudiante pase de una lectura puramente figural a una comprensión basada en la propiedad de equidistancia.

- **Ejemplo.** La mediatriz como lugar geométrico
- **Actividad con GeoGebra 1:** Construcción mediatriz de un segmento paso a paso.

Objetivo: Construir la mediatriz de un segmento e identificarla como el lugar geométrico de los puntos equidistantes de sus extremos.

Idea didáctica: Promover que los estudiantes comprendan la mediatriz como un lugar geométrico definido por una propiedad de equidistancia y no únicamente como una recta perpendicular a un segmento. Mediante la exploración dinámica en GeoGebra y la prueba de arrastre, se busca que reconozcan que todos los puntos de la mediatriz conservan la misma distancia a los extremos del segmento, favoreciendo la articulación entre los registros figural, dinámico, simbólico y verbal para construir una comprensión más profunda del concepto geométrico.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Abrir la vista gráfica y colocar dos puntos, A y B.
2. Trazar el segmento $\overline{AB}$.
3. Construir la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ con la herramienta correspondiente.
4. Colocar un punto **P** sobre la mediatriz.
5. Trazar los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$, y activar la visualización de sus medidas.

6. Con la herramienta **Mueve** arrastrar el punto **P** a lo largo de la recta mediatriz y, posteriormente, arrastrar los puntos **A** o **B** para modificar el segmento original (Figura 3.4).

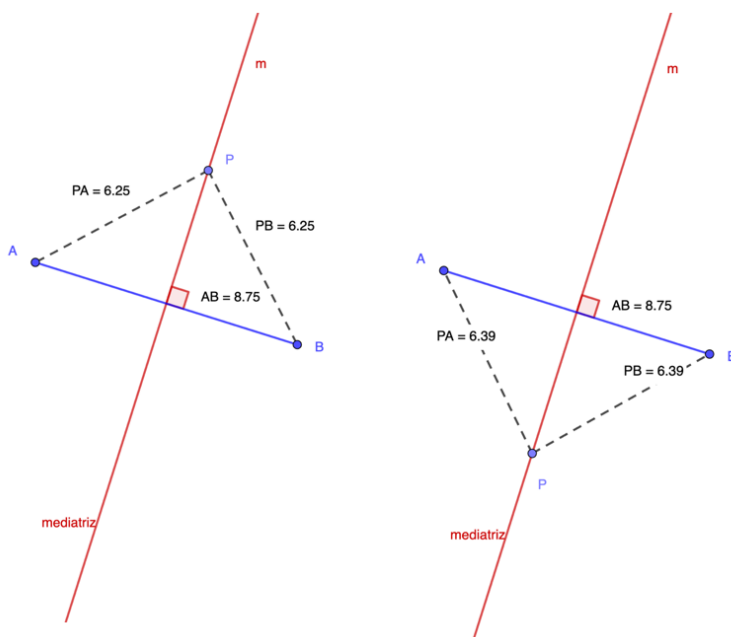


Figura 3.4. Exploración dinámica de la mediatriz de un segmento en GeoGebra.

Preguntas de observación (registro dinámico ↔ simbólico)

- a) ¿Qué ocurre con los valores de las distancias $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ mientras mueves el punto **P**?
- a) Al modificar la posición de **A** o **B**, las distancias cambian, pero ¿qué relación entre ellas permanece constante?

Preguntas para la comprensión (registro verbal ↔ simbólico)

- a) ¿Qué propiedad geométrica caracteriza a todos los puntos que forman esa recta?



- b) ¿Cómo podrías expresar esta relación usando lenguaje matemático (notación)? (p. ej. $P \in m \Leftrightarrow d(P,A)=d(P,B)$), donde m es mediatriz

Preguntas para la conjetura y generalización (metacognición)

- a) Si encontraras un punto fuera de esa recta, ¿podría estar a la misma distancia de **A** que de **B**?
- b) ¿Podemos definir la mediatriz como un lugar geométrico (es decir, un conjunto de puntos que cumplen una propiedad común) en lugar de concebirla únicamente como la recta perpendicular que interseca a un segmento en su punto medio? Justifica tu respuesta.
- c) ¿Qué diferencia hay entre ver la mediatriz como un dibujo y entenderla como una condición que cumplen infinitos puntos?

La actividad anterior es sumamente significativa porque obliga al estudiante a coordinar cuatro registros:

- Figural: El dibujo de la recta y el segmento.
- Dinámico: El movimiento que valida la propiedad en cualquier posición.
- Simbólico: Las medidas numéricas y la igualdad $\overline{PA} = \overline{PB}$.
- Verbal: La definición de la mediatriz como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de un segmento.

Preguntas para la reflexión:

- a) Observación:** ¿Qué ocurre con las distancias $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ al mover el punto P sobre la mediatriz? ¿Qué cambia y qué permanece constante al modificar la posición de A o B ?
- b) Comprensión:** ¿Qué propiedad geométrica cumplen todos los puntos de la mediatriz? ¿Por qué la igualdad $\overline{PA} = \overline{PB}$ se mantiene en cualquier posición de P sobre la recta?

c) Conjetura: ¿Puede existir un punto fuera de la mediatriz que esté a la misma distancia de A y B? ¿Cómo podría definirse la mediatriz a partir de la idea de lugar geométrico y no solo como una construcción gráfica?

- **Ejemplo.** Las diagonales de un paralelogramo como relación invariante.
- **Actividad con GeoGebra 2:** Construcción de un paralelogramo y exploración de sus diagonales.

Objetivo: Verificar que las diagonales de un paralelogramo se intersecan en sus puntos medios.

Idea didáctica: Promover en el estudiante la coordinación de varios registros de representación. En el registro figural, el estudiante observa el paralelogramo, sus diagonales y el punto donde se cruzan. En el registro dinámico, modifica la figura mediante el arrastre y comprueba que la propiedad se conserva. En el registro numérico-simbólico, compara las medidas $\overline{AE}$, $\overline{EC}$, $\overline{BE}$ y $\overline{ED}$. Finalmente, en el registro verbal, expresa la propiedad diciendo que las diagonales de un paralelogramo se intersecan en sus puntos medios. De este modo, GeoGebra permite que una propiedad geométrica deje de formar parte de un aprendizaje memorístico y se convierta en una relación observable, manipulable y justificable

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Punto** y ubicar dos puntos **A** y **B** en la vista gráfica.
2. Con la herramienta **Segmento** y trazar el segmento $\overline{AB}$.
3. Con la herramienta **Punto**, crear un tercer punto **C**, evitando que quede alineado con **A** y **B**. Este punto definirá la inclinación y la altura del paralelogramo.
4. Con la herramienta **Segmento** y trazar el segmento .





Garantizar el paralelismo

5. Con la herramienta **Paralela**, hacer clic en el punto **C** y luego en el segmento $\overline{AB}$. Así se obtiene una recta paralela a $\overline{AB}$ que pasa por **C**.
6. Con herramienta Paralela, hacer clic en el punto A y luego en el segmento $\overline{BC}$. Así se obtiene una recta paralela a $\overline{BC}$ que pasa por **A**.
7. Con la herramienta **Intersección**, marcar el punto donde se cruzan las dos rectas paralelas construidas. Puedes nombrar este punto como **D**.
8. Con la herramienta **Polígono**, unir los puntos en el orden **A, B, C, D** y nuevamente **A**, para formar el paralelogramo **ABCD**.
9. Ocultar las rectas auxiliares si se desea mejorar la visualización. Para ello, hacer clic derecho sobre cada recta y desactivar la opción **Objeto visible**.

Trazar las diagonales

10. Seleccionar la herramienta **Segmento** y trazar las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.
11. Seleccionar la herramienta **Intersección** y marcar el punto donde se cruzan las diagonales. Lo puedes nombrar este punto como **E**.

Verificar las relaciones de igualdad

12. Seleccionar la herramienta **Distancia o Longitud** y medir las distancias $\overline{AE}$, $\overline{CE}$, $\overline{BE}$, $\overline{DE}$. Observar en la vista gráfica los valores obtenidos.

Exploración dinámica: la propiedad invariante

13. Seleccionar la herramienta **Mueve** y arrastrar los puntos **A, B** o **C**.
14. Observar que, aunque el paralelogramo cambie de forma, se incline, se alargue o se achate, las siguientes relaciones se conservan: $\overline{AE} = \overline{CE}$ y $\overline{BE} = \overline{DE}$.

15. Concluir que el punto **E** es el punto medio de ambas diagonales. Por tanto, las diagonales de un paralelogramo se bisecan (Figura 3.5).

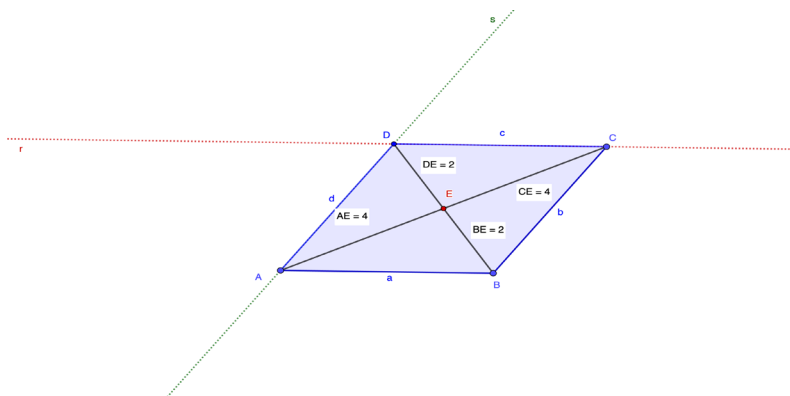


Figura 3.5. Exploración dinámica de las diagonales de un paralelogramo en GeoGebra.

Preguntas para la reflexión:

- a) Observación:** ¿Qué cambia en la figura cuando arrastras los puntos **A**, **B** o **C**? ¿Qué ocurre con las longitudes $\overline{AE}$ y $\overline{CE}$? ¿Qué ocurre con las longitudes $\overline{BE}$ y $\overline{DE}$? Aunque el paralelogramo cambie de forma, ¿qué relación permanece constante? ¿Qué significa decir que las diagonales de un paralelogramo se bisecan? ¿Esta propiedad depende de un dibujo particular o se cumple para cualquier paralelogramo?
- b) Comprensión:** ¿Por qué el punto **E** permanece como punto medio de ambas diagonales, aunque la figura cambie de forma? ¿Qué significa que las diagonales de un paralelogramo se bisecan?
- c) Conjetura:** ¿Crees que esta propiedad se cumple en cualquier paralelogramo? ¿Ocurrirá lo mismo en otras figuras de cuatro lados, como un trapecio o un cometa? ¿Qué condiciones debe cumplir una figura para que sus diagonales se corten en sus puntos medios?



Síntesis del apartado

Las actividades de la mediatriz y de las diagonales del paralelogramo permiten observar que el valor didáctico de GeoGebra no reside en su capacidad gráfica, sino en su poder de articular registros. El arrastre, la medición y la actualización simbólica convierten una propiedad geométrica en una experiencia observable, manipulable, susceptible de ser verbalizada. En ambos casos, la figura no se limita a ilustrar una definición, sino que se transforma en un campo de exploración donde el estudiante puede distinguir lo que cambia de lo que se conserva. Esta distinción entre apariencia e invariante constituye el núcleo del razonamiento geométrico y explica por qué GeoGebra, cuando se utiliza con intención didáctica, deja de ser un recurso visual para convertirse en un mediador semiótico.

3.4. Implicaciones didácticas para la planificación

Las ideas desarrolladas en este capítulo tienen consecuencias directas para la planificación de la enseñanza geométrica. Si comprender una figura no equivale simplemente a verla, entonces la tarea docente no puede limitarse a presentar dibujos correctos, definiciones formales o construcciones terminadas. Es necesario diseñar situaciones que ayuden al estudiante a pasar de la percepción inicial a la identificación de propiedades, de la manipulación a la explicación y de la imagen particular a la relación geométrica que se conserva.

Desde esta perspectiva, planificar una clase de geometría implica preguntarse no solo qué contenido se va a enseñar, sino también qué registros de representación semiótica se van a movilizar, qué relaciones se espera que el estudiante establezca entre ellos y qué papel cumplirá GeoGebra en ese proceso. Las siguientes orientaciones pueden servir como criterios para organizar ese trabajo.



Diseño de tareas de articulación entre registros

No basta con mostrar figuras estáticas ni con pedir que los estudiantes las nombren. Una tarea geométrica más rica debe exigir que el alumno observe, describa, simbolice, manipule y explique. Es decir, debe favorecer la articulación entre distintos registros de representación.

Por ejemplo, ante una circunferencia, no es suficiente preguntar ¿qué figura es? Una tarea más potente podría pedir al estudiante que describa verbalmente la propiedad que la define, identifique en el dibujo el centro, el radio y algunos puntos de la curva, relacione esa representación con una expresión simbólica y modifique el radio en GeoGebra para explicar qué cambia y qué permanece.

De este modo, el estudiante no solo reconoce una forma, sino que coordina su definición, su representación visual, su expresión simbólica y su comportamiento dinámico. Esta orientación se apoya en la idea de Duval de que la comprensión matemática requiere trabajar con registros de representación semiótica diferentes y, especialmente, realizar conversiones entre ellos.

Diagnóstico de dificultades semióticas

Muchas respuestas incorrectas en geometría no se deben únicamente a la falta de conocimiento del contenido, sino a dificultades para coordinar registros. Un estudiante puede conocer una definición, pero no reconocerla en una figura no prototípica; puede medir correctamente, pero no interpretar el significado de la medida; o puede manipular una construcción en GeoGebra sin comprender qué propiedad está poniendo en juego.

Al planificar, el docente debería anticipar posibles obstáculos: confundir el dibujo con el objeto geométrico, depender de la orientación habitual de una figura, reconocer una propiedad solo cuando aparece en





una configuración prototípica, no vincular una medida numérica con una relación geométrica o no poder expresar verbalmente lo que observa dinámicamente.

Este diagnóstico permite que la intervención docente no se limite a corregir respuestas, sino que ayude a comprender de dónde proviene la dificultad. No es lo mismo que un estudiante “no sepa” qué es una altura, a que crea que toda altura debe verse vertical y quedar dentro del triángulo. En el segundo caso, el problema es de lectura geométrica de la figura.

GeoGebra como articulador, no como simple visor

GeoGebra no debería incorporarse solo para mostrar figuras más atractivas o para reemplazar la pizarra. Su valor didáctico aparece cuando permite explorar variaciones, comprobar invariantes, coordinar registros y formular conjeturas. Hohenwarter y Preiner presentan GeoGebra como un entorno de matemática dinámica que vincula geometría, álgebra y cálculo, lo cual justifica su potencial para articular representaciones en una misma experiencia didáctica.

Una construcción dinámica bien diseñada puede ayudar al estudiante a distinguir entre propiedades esenciales y rasgos accidentales. Al arrastrar una figura, algunas características cambian: la posición, el tamaño, la inclinación o la forma aparente. Otras, en cambio, permanecen: la perpendicularidad, la igualdad de distancias, el paralelismo o la bisección de diagonales. Esa diferencia entre lo que cambia y lo que se conserva es clave para el razonamiento geométrico.

Por ello, la pregunta central al usar GeoGebra no debería ser: ¿qué construcción voy a hacer?, sino: ¿qué relación quiero que el estudiante descubra, observe, exprese o justifique mediante esta construcción?

Preguntas para orientar la planificación

Una forma práctica de incorporar estas ideas consiste en revisar cada actividad geométrica a partir de algunas preguntas orientadoras:

A. Sobre los registros de representación:

- a) ¿Qué registros aparecen en la actividad: figural, verbal, simbólico, numérico o dinámico?
- b) ¿El estudiante debe relacionar registros o permanece solo en uno?
- c) ¿La tarea exige explicar lo que se observa o solo identificar una figura?

B. Sobre la visualización:

- a) ¿La figura presentada puede reforzar un prototipo visual limitado?
- b) ¿Se ofrecen casos variados, rotados, deformados o no convencionales?
- c) ¿Se ayuda al estudiante a distinguir entre apariencia y propiedad?

C. Sobre GeoGebra:

- a) ¿Qué aporta el entorno dinámico que no podría lograrse del mismo modo con lápiz y papel?
- b) ¿Qué se espera que el estudiante arrastre, mida, compare o verbalice?
- c) ¿Qué propiedad debe permanecer invariante durante la exploración?

D. Sobre la intervención docente:

- a) ¿Qué preguntas permitirán pasar de la observación a la explicación?
- b) ¿Qué errores pueden revelar una dificultad de coordinación entre registros?



c) ¿Cómo se cerrará la actividad para que la exploración no quede solo como manipulación?

Alineación curricular

Estas orientaciones se vinculan con marcos curriculares que promueven una enseñanza activa de la matemática, centrada en procesos como identificar, analizar, razonar, explicar, argumentar y crear. En ese contexto, las tecnologías digitales como GeoGebra no constituyen un fin en sí mismas, sino un medio para enriquecer la actividad matemática del estudiante.

Usar GeoGebra con sentido didáctico implica integrarlo a una secuencia donde la exploración conduzca a la explicitación, la manipulación se transforme en razonamiento y la visualización se articule con el lenguaje y la simbolización. Así, el software deja de ser un recurso accesorio y se convierte en un mediador para construir comprensión geométrica.

Planificar desde la perspectiva de los registros de representación semiótica supone diseñar tareas que ayuden al estudiante a mirar más allá del dibujo. El propósito no es que vea más figuras, sino que aprenda a leerlas geométricamente, a expresar sus relaciones y a reconocer las propiedades que permanecen más allá de la apariencia visual.

Síntesis del apartado

Planificar desde los registros de representación semiótica implica desplazar el foco del contenido al proceso de comprensión. No basta con seleccionar definiciones, ejemplos y construcciones: es necesario anticipar qué registros se movilizarán, qué conversiones se exigirán y qué papel cumplirá la herramienta digital en esa coordinación. Las preguntas orientadoras que se han propuesto invitan a transformar la planificación en una práctica reflexiva, donde cada decisión didáctica se sostiene en una intención semiótica explícita. Vista así, la planificación deja de ser una secuencia de actividades y se convierte en un dispositivo para que el



estudiante aprenda a leer geométricamente las figuras, articular sus relaciones y reconocer las propiedades que permanecen más allá de su apariencia.

A lo largo de este capítulo se ha sostenido una idea central de que, en geometría, comprender no equivale a ver. La actividad matemática se realiza siempre a través de representaciones, y por eso la enseñanza no puede limitarse a presentar figuras correctas o definiciones acabadas. Distinguir el objeto geométrico de su dibujo, reconocer las propiedades que permanecen más allá de la orientación o el tamaño, y articular los registros figural, verbal, simbólico y dinámico-digital son tareas cognitivas exigentes que requieren ser planificadas con intención.

Desde la teoría de Duval, la comprensión emerge cuando el estudiante puede tratar un objeto dentro de un registro y, sobre todo, convertirlo a otro sin perder su sentido matemático.

Los ejemplos analizados el triángulo rectángulo y el obstáculo de la orientación, la circunferencia como objeto multirepresentacional, la mediatriz como lugar geométrico y las diagonales del paralelogramo como relación invariante ilustran que las propiedades geométricas se vuelven comprensibles cuando dejan de ser frases memorizadas y se convierten en relaciones observables, manipulables y justificables.

En esa transformación, GeoGebra cumple un papel particular. No es un visor más sofisticado de figuras ni un sustituto de la pizarra, sino un mediador semiótico que permite poner en diálogo la percepción, la construcción, la medición, la simbolización y el lenguaje. Su valor didáctico no surge de su uso, sino del diseño de la tarea y de las preguntas que la acompañan. Una construcción dinámica adquiere sentido cuando ayuda al estudiante a distinguir lo accidental de lo esencial y a formular, con sus propias palabras, la relación que permanece.

De ahí que las implicaciones para la planificación no sean accesorias, sino consustanciales al enfoque. Pensar la clase de geometría desde los registros de representación supone preguntarse qué se quiere que el estudiante observe, exprese, simbolice y justifique, y diseñar la secuencia para que la exploración conduzca efectivamente a la explicitación. En este horizonte, las figuras, el lenguaje, la notación y las construcciones dinámicas dejan de ser recursos paralelos y se integran en una misma arquitectura didáctica orientada al razonamiento. Comprender geométricamente, en definitiva, es aprender a leer lo que la figura no muestra por sí sola: las propiedades que la definen.

Preguntas para la reflexión docente

1. En mis clases, ¿qué registro predomina, el figural, el verbal, el simbólico o el dinámico? ¿Existe un equilibrio o una jerarquía que favorece a uno sobre otros?
2. ¿Qué dificultades de mis estudiantes podrían explicarse por problemas de coordinación de registros y no por falta de estudio del contenido?
3. ¿En qué momentos de mi práctica doy por sentado que una figura se explica sola?
4. ¿Qué oportunidades reales ofrezco para que los estudiantes describan con sus propias palabras lo que observan antes de pasar a la notación formal?
5. ¿Mis actividades en GeoGebra promueven la exploración y conversión de registros o se limitan a una manipulación mecánica?
6. ¿Qué tipo de preguntas utilizo para desplazar la atención del alumno desde la apariencia de la figura hacia las propiedades que la definen?
7. ¿Cómo podría rediseñar mi próxima planificación para que una actividad habitual incluya observación, descripción, conversión y justificación?

04.

Geogebra como entorno de aprendizaje: potencialidades, riesgos y criterios de uso

4.1. GeoGebra como entorno de exploración y construcción

En los capítulos anteriores, hemos analizado que la comprensión geométrica no es un proceso espontáneo, sino una construcción progresiva que requiere superar el anclaje en la percepción y la rigidez de los prototipos visuales. Sin embargo, surge una pregunta fundamental para la práctica docente: ¿cómo crear un escenario de aprendizaje donde estas dificultades se hagan visibles y se puedan trabajar intencionadamente?

Es en este punto donde GeoGebra deja de ser un simple recurso tecnológico para convertirse en un entorno de mediación cognitiva. No se trata únicamente de un software para hacer dibujos de forma más rápida o estética,



sino de un laboratorio dinámico que permite a los estudiantes interactuar con los objetos geométricos, poner a prueba sus conjeturas y confrontar sus errores en tiempo real.

Este capítulo explora a fondo el papel de GeoGebra como un entorno que favorece la exploración y la construcción de conceptos. Analizaremos sus potencialidades para movilizar el pensamiento, pero también los riesgos de un uso puramente técnico que puede oscurecer el propósito matemático. Finalmente, propondremos criterios claros para que el docente decida cuándo y para qué integrar esta herramienta en su planificación, asegurando que el centro de la clase siga siendo la construcción del conocimiento geométrico.

Tradicionalmente, la geometría escolar se ha apoyado en el papel y el lápiz, soportes que, por su naturaleza estática, favorecen una visión de la geometría basada en estados finales (el dibujo terminado). En contraste, GeoGebra se constituye como un entorno de geometría dinámica (EGD) donde la construcción no es el fin, sino el medio para la exploración.

La construcción como soporte del pensamiento.

En este entorno, construir un objeto geométrico trasciende el acto de dibujar. Cuando un estudiante utiliza herramientas de restricción (como perpendiculares, paralelas o bisectrices) en lugar de simplemente colocar puntos al azar, está programando propiedades matemáticas.

La diferencia fundamental reside en lo que la didáctica denomina la prueba de arrastre (drag test). En un dibujo estático, un cuadrado es un cuadrado porque se ve como tal. En GeoGebra, un cuadrado es un cuadrado solo si, al arrastrar cualquiera de sus vértices, la figura se deforma en tamaño o posición, pero conserva

sus propiedades esenciales (ángulos de 90° y lados iguales).

La exploración: de lo particular a lo general.

GeoGebra permite pasar de una geometría de casos a una geometría de familias. Mientras que en el cuaderno el estudiante dibuja un triángulo, en el entorno dinámico, mediante el movimiento de un vértice, puede visualizar infinitos triángulos en pocos segundos. Esta capacidad de variación es la que permite:

- **Identificar invariantes:** ¿Qué es aquello que no cambia a pesar del movimiento? (p. ej., la suma de los ángulos internos).
- **Generar conjeturas:** La observación de regularidades durante el arrastre motiva al estudiante a suponer leyes generales.
- **Validación empírica inmediata:** GeoGebra actúa como un juez que devuelve una respuesta visual constante. De ahí que, si la construcción fue basada en propiedades, la figura resiste el movimiento; si fue basada únicamente en la apariencia (visión perceptiva), la figura pierde su integridad geométrica. Este fenómeno es lo que autores como Arzarello et al. (2002) definen como el paso de un dibujo (entidad gráfica) a una figura (entidad teórica). Según Laborde (2005), la robustez de una construcción se comprueba mediante el **test del arrastre** (*dragging test*), si al mover cualquier punto libre la figura conserva todas sus propiedades iniciales, estamos ante un objeto geométrico real y no ante un simple bosquejo visual. De manera que, el arrastre no es solo un juego visual, sino una herramienta de validación teórica.
- **Ejemplo.** Imagine que un estudiante construye un triángulo isósceles en papel. Ese es un caso único y estático; si desea probar su hipótesis en otro triángulo, debe borrar y comenzar de nuevo. Al trasladar esta actividad a un entorno dinámico



como el de GeoGebra, el estudiante no manipula un dibujo, sino una familia de triángulos. Al arrastrar un vértice, el software genera cientos de variantes en tiempo real que mantienen la restricción de tener dos lados iguales. En este proceso, el estudiante deja de observar un triángulo para observar la propiedad isósceles en movimiento. Si la construcción es correcta, la figura resistirá el arrastre (geometría de familias); si solo se dibujó para que pareciera isósceles, la figura se deformará al primer movimiento, evidenciando una visión perceptiva o ingenua.

- **Actividad con GeoGebra 1:** Diferencia entre dibujar (perceptivo) y construir (basado en propiedades). Caso 1.

Objetivo: Reconocer entre una figura dibujada por apariencia y una construcción geométrica basada en propiedades.

Idea didáctica: Promover que los estudiantes distingan entre una representación perceptiva y una construcción geométrica basada en propiedades, mediante la prueba de arrastre en GeoGebra. A través de una construcción “blanda” de un triángulo isósceles, se busca que comprendan que la apariencia visual no asegura la conservación de las propiedades geométricas cuando la figura es manipulada dinámicamente.

Construcción sugerida en GeoGebra:

La construcción blanda (*soft construction*) o incorrecta, visión perceptiva.

1. Abre GeoGebra y desactiva la cuadrícula y los ejes para mayor claridad.
2. Usa la herramienta Segmento y construye tres segmentos que parezcan formar un triángulo isósceles.
3. Usa la herramienta Punto para unir los extremos si es necesario.

4. La prueba (Test del Arrastre): Selecciona la herramienta Mueve y arrastra uno de los vértices. El triángulo se deformará o perderá su integridad isométrica (dejará de parecer isósceles) porque no hay una regla que una sus lados (Figura 4.1).

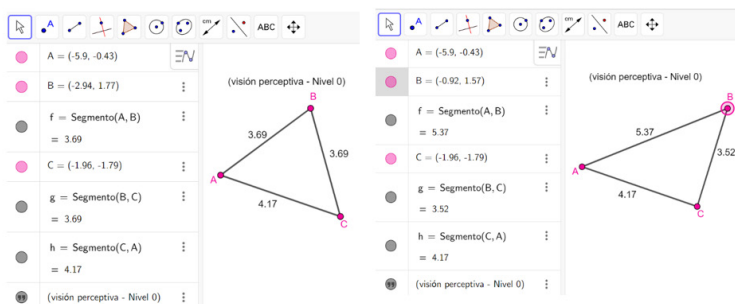


Figura 4.1. Construcción “blanda” de un triángulo.

Preguntas para la reflexión:

- Observación: ¿Qué ocurre con el triángulo al arrastrar uno de sus vértices? ¿Qué propiedades cambian durante el movimiento?
- Comprensión: ¿Por qué el triángulo deja de ser isósceles al mover sus puntos? ¿Qué diferencia existe entre dibujar una figura y “construirla” geoméricamente?
- Conjetura: ¿Qué condiciones o relaciones geométricas serían necesarias para que el triángulo conserve siempre su forma isósceles? ¿Crees que todas las figuras que “parecen correctas” resistirán la prueba del arrastre?

- **Actividad con GeoGebra 2:** Diferencia entre dibujar (perceptivo) y construir (basado en propiedades). Caso 2.

Objetivo: Verificar que una construcción robusta conserva las propiedades de la figura durante el arrastre.





Idea didáctica: Promover que los estudiantes reconozcan la importancia de construir figuras geométricas a partir de propiedades invariantes y no únicamente desde su apariencia visual. Mediante la construcción robusta de un triángulo isósceles en GeoGebra, se busca que comprendan cómo las relaciones geométricas, en este caso, la igualdad de radios de una circunferencia, permiten que la figura conserve sus propiedades al ser manipulada, fortaleciendo el paso de una visión perceptiva hacia una comprensión teórica de la geometría.

Construcción sugerida en GeoGebra:

La construcción robusta (robust construction), visión teórica.

1. Esta construcción utiliza una propiedad, el radio de una circunferencia.
2. Usa la herramienta **Circunferencia (centro, punto)** y construye una circunferencia.
3. Usa la herramienta **Punto** en Objeto. Ubica un punto sobre la circunferencia.
4. Usa la herramienta **Segmento** y construye dos segmentos, uno desde el centro hasta el punto que acabas de crear, y otro desde el centro hasta el punto que define la circunferencia original.
5. Usa la herramienta Segmento para unir los dos puntos que están en la circunferencia.
6. Oculta la circunferencia (clic derecho sobre ella y desactiva Muestra Objeto).
7. La prueba (Test del Arrastre): Selecciona **Mueve** y arrastra cualquier vértice. El triángulo cambiará de tamaño y posición, pero siempre conservará su naturaleza isósceles. Esto ocurre porque dos de sus lados son radios de la misma circunferencia (aunque ahora sea invisible). Esta construcción resiste el arrastre (Figura 4.2).

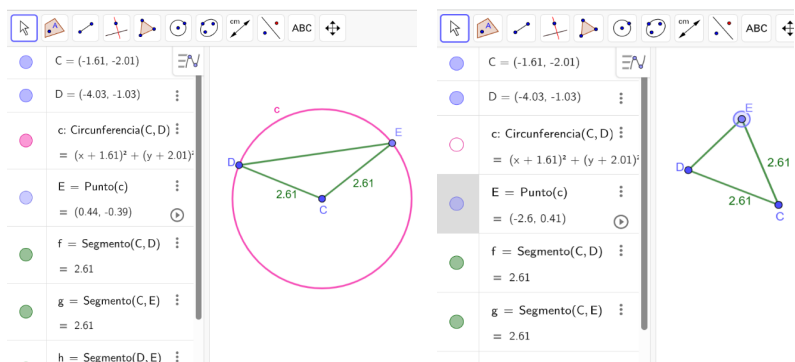


Figura 4.2. Construcción “robusta” de un triángulo.

En este caso 2, decimos que la construcción es robusta porque ha sido desarrollada utilizando propiedades geométricas y relaciones de dependencia. A diferencia de una construcción blanda o puramente perceptiva (caso 1), esta configuración resiste el arrastre debido a que el software garantiza la invarianza de las propiedades teóricas que la sustentan.

Preguntas para la reflexión:

- a) **Observación:** ¿Qué ocurre con el triángulo al arrastrar sus vértices? ¿Qué propiedades cambian y cuáles permanecen invariantes durante el movimiento?
- b) **Comprensión:** ¿Por qué el triángulo conserva siempre su condición de isósceles? ¿Qué papel cumple la circunferencia, aunque no sea visible, en la estabilidad de la construcción?
- c) **Conjetura:** ¿Qué otras figuras podrían construirse de manera robusta utilizando propiedades geométricas? ¿Qué ocurriría si uno de los lados dejara de depender de la circunferencia? ¿Toda construcción basada en propiedades resistirá la prueba del arrastre?

El rol de la construcción en el aprendizaje

Construir en GeoGebra obliga al estudiante a realizar una aprehensión operativa. Para lograr que una figura





sea resistente al arrastre, el alumno debe traducir su conocimiento verbal o simbólico a acciones procedimentales explícitas. En este sentido, la construcción actúa como un puente, no es solo un medio para visualizar geometría, sino un laboratorio para su producción. En términos de (Duval, 2006), esta exigencia moviliza un trabajo sobre la configuración que trasciende el reconocimiento visual (aprehensión perceptiva) para implicar una transformación y reorganización intencionada de los objetos bajo leyes matemáticas.

Además, en los EGD, la secuencia de construcción establece una jerarquía de dependencias entre los objetos. Por ello, una figura robusta, o sea, aquella fundamentada en relaciones geométricas y no en simples trazos, conserva sus propiedades ante cualquier movimiento. Esta resistencia al arrastre posee un valor cognitivo central ya que obliga al estudiante a distinguir entre la apariencia (lo que parece ser) y la propiedad (lo que está garantizado teóricamente). Así, la construcción se convierte en una vía privilegiada para explorar invariantes, formular conjeturas y sostener procesos de validación empírica y lógica.

Síntesis del apartado

El paso del lápiz y papel a un entorno de geometría dinámica no consiste solamente en cambiar el soporte material, sino en transformar el estatuto mismo de la figura. En GeoGebra, construir deja de ser un acto gráfico para convertirse en una operación lógica, cada herramienta utilizada introduce una restricción geométrica que el software se encarga de sostener bajo el movimiento. La prueba del arrastre se vuelve así un instrumento de validación teórica que permite distinguir entre lo que parece y lo que es, entre el dibujo y la figura, entre la apariencia y la propiedad. Esta exigencia, que obliga al estudiante a traducir su saber verbal en relaciones explícitas, hace de la construcción dinámica una experiencia productiva

del pensamiento geométrico. Más que un medio para representar geometría, GeoGebra se constituye como un laboratorio para producirla.

4.2. Potencialidades didácticas del uso de GeoGebra

El valor de GeoGebra no consiste solo en que permite representar figuras con mayor precisión que en el papel. Su aporte más profundo es que cambia la manera en que la geometría puede vivirse en el aula. Con GeoGebra, la geometría deja de ser únicamente un conjunto de figuras ya dadas para mirar o de propiedades ya formuladas para repetir, y puede convertirse en un espacio donde los estudiantes producen, ponen a prueba y reorganizan sus propias ideas. En este sentido, su potencia no es simplemente técnica, sino didáctica: permite que la geometría se vuelva más visible, más manipulable, más discutible y, sobre todo, más pensable (Hohenwarter y Jones, 2007). Desde esta perspectiva, sus potencialidades pueden comprenderse a partir de cuatro grandes ejes.

1. Hacer visible lo que permanece.

Una de las contribuciones más importantes de GeoGebra es que ayuda a desplazar la atención desde la apariencia de una figura hacia las relaciones que se conservan. En una representación fija, el estudiante suele apoyarse en lo que ve de inmediato, la forma general, la posición, el tamaño o la orientación. En cambio, cuando puede arrastrar puntos y observar qué cambia y qué no cambia, empieza a advertir que una figura no se define solo por su aspecto, sino por las propiedades que mantiene.

Este desplazamiento es didácticamente decisivo. Permite que el estudiante distinga entre rasgos accidentales y propiedades esenciales. Así, la visualización deja de ser una simple mirada sobre una figura y se convierte en una actividad intelectual orientada a reconocer invariantes. En lugar de





preguntar solo qué figura es, la clase puede empezar a preguntarse qué relación permanece, qué condición se conserva o qué hace que siga siendo la misma figura (Laborde, 2000).

2. Pasar de figuras aparentes a figuras construidas.

Otra potencialidad central de GeoGebra es que obliga a diferenciar entre una figura que parece correcta y una figura que está construida bajo condiciones geométricas. Esta diferencia, que en la enseñanza tradicional a veces queda difusa, se vuelve especialmente poderosa en un entorno dinámico. Un dibujo puede parecer un cuadrado, un triángulo isósceles o un rectángulo, pero solo una construcción bien realizada garantiza esas propiedades cuando la figura se somete al arrastre.

Aquí aparece una transformación didáctica muy importante: el estudiante ya no trabaja solo con figuras mostradas, sino con figuras producidas. Para construir, debe decidir qué relaciones necesita establecer, qué propiedades debe garantizar y qué herramientas debe usar para que la figura conserve su estructura. En ese proceso, la definición deja de ser una frase externa y empieza a funcionar como criterio de acción. Si la propiedad no fue realmente construida, la figura se desarma; si la relación fue correctamente establecida, la figura resiste. Esa diferencia convierte la construcción en una experiencia de comprensión mucho más profunda que la simple reproducción visual (Laborde et al., 2006).

3. Transformar la exploración en fuente de conjeturas.

GeoGebra también tiene la capacidad de convertir la exploración en una fuente genuina de pensamiento matemático. Cuando los estudiantes arrastran, comparan, miden, prueban variaciones y observan regularidades, empiezan a formular preguntas que no provienen solo del docente, sino de la propia actividad. En ese contexto, la conjetura deja de aparecer

como una respuesta esperada y puede surgir como necesidad intelectual, algo parece ocurrir siempre, algo se conserva, algo llama la atención y exige explicación.

Esta potencialidad es especialmente valiosa porque conecta la actividad experimental con la construcción de sentido. La exploración no queda reducida a “mover cosas en la pantalla”, sino que puede convertirse en una práctica de búsqueda de patrones, anticipación de resultados y revisión de ideas iniciales. En ese proceso, GeoGebra ofrece además una ventaja importante, ya que permite coordinar distintos registros de representación semiótica en un mismo entorno. El estudiante puede ver una figura, modificarla, leer relaciones en la vista algebraica y, en ciertos casos, articular lo gráfico con lo simbólico. Esta coordinación amplía las posibilidades de comprensión, porque aprender geometría también implica pasar de una representación a otra con sentido (Duval, 2006; Hohenwarter y Jones, 2007).

4. Hacer de la clase un espacio de discusión matemática.

GeoGebra enriquece la conversación matemática en el aula. Una construcción puede convertirse en objeto de análisis colectivo: qué se hizo, por qué funciona, qué propiedad quedó garantizada, qué cambió con el arrastre, por qué una figura conserva su forma y otra no. En este sentido, la herramienta no tiene por qué aislar al estudiante frente a la pantalla; al contrario, puede dar lugar a discusiones mucho más ricas que las que suelen generarse a partir de un dibujo fijo.

Aquí se vuelve especialmente importante una idea que atraviesa este libro, la geometría no debería enseñarse solo para identificar o calcular, sino también para explicar, comparar, conjeturar y justificar. GeoGebra puede favorecer ese tránsito porque ofrece una base empírica fuerte sobre la cual discutir. No reemplaza la argumentación, pero sí puede volverla necesaria. Una regularidad observada en la pantalla puede convertirse en una pregunta colectiva: ¿por qué ocurre?, ¿basta con





verlo?, ¿qué propiedad lo explica?, ¿cómo podríamos sostenerlo sin depender solo de la figura? Así, la herramienta puede ayudar a pasar de la constatación visual a una discusión más elaborada sobre validación y prueba (Laborde, 2000).

Una condición decisiva: la mediación docente.

Sin embargo, ninguna de estas potencialidades actúa automáticamente. GeoGebra no enseña por sí solo, ni garantiza comprensión por el simple hecho de estar presente en el aula. Su potencia depende de las decisiones didácticas que lo acompañan: el tipo de tarea que se propone, la calidad de las preguntas, la selección de los ejemplos, la anticipación de errores y la conducción de la discusión.

Por eso, el verdadero potencial de GeoGebra no reside solo en la herramienta, sino en la manera en que el docente la integra a una situación de aprendizaje. No se trata de que el software piense por el estudiante, sino de que permita organizar condiciones en las que el pensamiento geométrico pueda desplegarse con más fuerza. En este sentido, GeoGebra vale menos por lo que muestra que por lo que obliga a preguntar, a construir, a distinguir, a revisar y a justificar. Su aporte más valioso consiste en ayudar a que la geometría deje de presentarse como un saber ya terminado y se convierta, para los estudiantes, en un campo de relaciones que pueden explorar, producir y comprender (Laborde et al., 2006).

Síntesis del apartado

Las cuatro potencialidades analizadas, hacer visible lo que permanece, distinguir entre figuras aparentes y figuras construidas, convertir la exploración en fuente de conjeturas y abrir el aula a la discusión matemática, comparten un denominador común. Este denominador es que todas ellas apuntan a una forma de aprendizaje que privilegia la actividad intelectual del estudiante

por sobre la mera recepción del contenido. GeoGebra adquiere su pleno valor cuando deja de utilizarse como un visor sofisticado y pasa a operar como un entorno donde se piensa, se decide, se argumenta y se justifica. Sin embargo, ninguna de estas potencialidades se actualiza por la sola presencia del software. Su realización depende de la mediación docente, esto es, del diseño de la tarea, la calidad de las preguntas y la conducción de la discusión colectiva. La herramienta no enseña, pero puede crear las condiciones para que el pensamiento geométrico tenga dónde desplegarse.

4.3. Riesgos de un uso de GeoGebra meramente técnico

Si bien GeoGebra ofrece posibilidades muy ricas para la enseñanza de la geometría, su presencia en el aula no garantiza por sí misma comprensión matemática. Uno de los principales riesgos consiste en reducir su uso a una secuencia de pasos, clics o comandos que el estudiante ejecuta sin comprender las relaciones geométricas implicadas. Cuando esto ocurre, la actividad puede verse moderna o atractiva, pero el aprendizaje queda empobrecido, el estudiante manipula, pero no necesariamente piensa; construye, pero no siempre comprende qué está construyendo ni por qué funciona. La investigación sobre entornos de geometría dinámica ha advertido que estas herramientas no constituyen un medio autosuficiente y que su valor educativo depende en gran medida del tipo de tareas, de las preguntas propuestas y de la mediación docente que las acompaña (Jones, 2005; Laborde, 2000).

1. Reducir la actividad a seguir pasos.

Un riesgo crítico aparece cuando la tarea se limita a la reproducción mecánica de procedimientos. En este escenario, el estudiante desarrolla una habilidad instrumental (saber qué botón presionar), pero no necesariamente una competencia geométrica. La





construcción deja de ser un proceso de pensamiento para convertirse en un algoritmo técnico.

- **Ejemplo de uso inadecuado** (la instrucción procedimental). El docente dicta una secuencia cerrada: Hagan clic en la herramienta **Segmento**, luego en **Punto medio**, después en **Recta perpendicular**.... Los estudiantes siguen las indicaciones, obtienen una figura estéticamente perfecta, pero la actividad termina en el resultado, no en la reflexión. Aquí el software oculta la geometría en lugar de revelarla.
- **Ejemplo de uso adecuado** (la mediación como problema). El docente plantea un desafío que exige una decisión matemática: Necesitamos ubicar todos los puntos que se encuentran exactamente a la misma distancia de los extremos **A** y **B**. ¿Cómo podríamos construirlos de modo que, al mover **A** o **B**, sigan manteniendo esa propiedad?

En el primer caso, el docente asume la carga cognitiva de la construcción; en el segundo, se la devuelve al estudiante (lo que Brousseau llama devolución). Como señalan Laborde et al. (2006), una actividad técnicamente exitosa puede ser didácticamente estéril si no obliga al alumno a:

- **Decidir:** ¿Qué herramienta garantiza la propiedad?
- **Interpretar:** ¿Por qué la figura se comporta así al arrastrarla?
- **Justificar:** ¿Qué relación geométrica sostiene lo que veo en pantalla?

2. Confundir observación con comprensión.

Un riesgo frecuente en el aula tecnológica es asumir que, porque una propiedad se ve en la pantalla o se repite constantemente al arrastrar un objeto, el estudiante ya la ha comprendido o, peor aún, la ha demostrado. Una regularidad observada es una evidencia, pero no es una explicación.

- **Ejemplo de uso inadecuado.** En una actividad sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo, los estudiantes miden los tres ángulos con la herramienta de medición, observan que la suma siempre arroja 180° y concluyen, ya está demostrado, siempre da lo mismo. Aquí, GeoGebra se usa como un instrumento de medida (como un transportador digital), limitando el aprendizaje a la constatación de un hecho.
- **Ejemplo de uso adecuado** (GeoGebra como motor de conjeturas y búsqueda de porqués). Tras notar que la suma no cambia al deformar el triángulo, el docente interviene diciendo, hemos encontrado una regularidad muy potente, pero en matemática la vista puede engañarnos. ¿Cómo podemos asegurar que esto ocurrirá en todos los triángulos posibles, incluso en los que no hemos dibujado?

Después de la medición, el docente puede intervenir diciendo, hemos observado una regularidad muy fuerte, pero ahora necesitamos explicar por qué ocurre. A partir de allí, construye con los estudiantes una recta paralela a uno de los lados y orienta la discusión hacia relaciones angulares que permitan justificar la propiedad.

En el uso inadecuado, GeoGebra se convierte en un verificador visual. En el adecuado, la exploración empírica funciona como punto de partida para una elaboración más profunda. El entorno dinámico puede favorecer la conjetura, pero no sustituye la necesidad de argumentar (Laborde, 2000; Stylianides et al., 2023).

3. Desviar la atención hacia lo accesorio.

Un tercer riesgo aparece cuando la riqueza del entorno técnico desplaza la atención del contenido matemático. Si la tarea no está bien focalizada, el estudiante puede concentrarse más en mover objetos, cambiar colores, activar vistas o hacer que se vea bonito más que en el análisis de las relaciones geométricas subyacentes.





- **Ejemplo de uso inadecuado.** El docente propone explorar los cuadriláteros de forma totalmente abierta. Al no haber un desafío específico, muchos estudiantes agotan el tiempo de clase personalizando la estética de las figuras (grosor de líneas, sombreados, animaciones decorativas) sin avanzar en la identificación de propiedades o jerarquías. En este caso, la herramienta se vuelve un juguete distractor.
- **Ejemplo de uso adecuado.** El docente delimita la tarea con un propósito intelectual claro: Construyan un cuadrilátero que tenga sus cuatro lados iguales. Una vez construido, sométanlo a la prueba de arrastre y respondan, ¿qué condición adicional necesitamos imponerle para que, sin importar cómo lo movamos, se mantenga siempre como un cuadrado?

La diferencia no radica en prohibir las opciones de personalización, sino en establecer un foco intelectual. Como señalan Hohenwarter y Jones (2007); y Jones (2005) el problema no es la multiplicidad de funciones de GeoGebra, sino la ausencia de una tarea que ayude al estudiante a distinguir lo invariante (la propiedad matemática) de lo contingente (el color o el grosor).

Una buena tarea en GeoGebra debe ser matemáticamente exigente y técnicamente accesible. Si el tiempo de decoración supera al tiempo de reflexión, la intención didáctica se ha diluido.

4. Convertir la clase en una demostración del docente.

También existe el riesgo de que GeoGebra se utilice únicamente como un recurso de exposición magistral. Cuando el docente monopoliza el software para mostrar construcciones ya terminadas, la tecnología queda reducida a una pizarra de lujo que muestra verdades acabadas, anulando el potencial investigativo del entorno dinámico.

- **Ejemplo de uso inadecuado.** El docente proyecta una construcción terminada sobre la mediatriz, arrastra un punto y demuestra visualmente que las distancias a los extremos son iguales. Los estudiantes asumen un rol de espectadores pasivos, miran, copian una conclusión dictada y pasan al siguiente tema. Aquí, la carga cognitiva y el descubrimiento han quedado del lado del profesor.
- **Ejemplo de uso adecuado.** El docente proyecta solo un segmento inicial y lanza un desafío: Necesitamos ubicar un punto que esté exactamente a la misma distancia de **A** y de **B**. ¿Dónde lo pondrían? ¿Habrá más de uno? A medida que los estudiantes proponen lugares, se va construyendo la noción de lugar geométrico. Algunos grupos prueban sus ideas en sus dispositivos, comparan resultados y discuten qué propiedad geométrica garantiza esa equidistancia.

En el primer caso, la herramienta muestra una verdad cerrada; en el segundo, actúa como un andamio para una experiencia de búsqueda y validación. La mediación docente es indispensable, pero su función no debe ser exhibir el conocimiento, sino gestionar la participación activa del estudiante en su producción (Laborde et al., 2006).

En una clase con GeoGebra, el ratón (mouse) debería estar más tiempo en manos de los estudiantes que en las del docente. La verdadera magia didáctica ocurre cuando el alumno siente la resistencia de la propiedad al arrastrar el objeto, no cuando ve al docente hacerlo.

5. Creer que una construcción correcta equivale a comprensión.

Existe el riesgo de suponer que si una construcción funciona en la pantalla (es decir, resiste la prueba de arrastre), la idea matemática ya ha sido comprendida. Sin embargo, el éxito técnico no siempre refleja una comprensión profunda. Un estudiante puede haber





seguido una intuición o una serie de ensayos y errores hasta lograr una figura estable, sin ser capaz de explicar la red de propiedades que la sostiene.

- **Ejemplo de uso inadecuado.** Un estudiante construye correctamente un rectángulo y, al arrastrarlo, la figura conserva su forma. El docente, al ver que la construcción es resistente, da por concluida la tarea. En este caso, el proceso se queda en la aprehensión operativa (el hacer), omitiendo la necesidad de formalizar el conocimiento.
- **Ejemplo de uso adecuado.** Una vez que la figura funciona, el docente inicia una fase de explicitación, lograste que no se desarmara. Ahora, ¿qué relaciones garantizan que siga siendo un rectángulo? Si tuvieras que explicárselo a alguien que no ve la pantalla, ¿qué condiciones dirías que son obligatorias?

Desde la perspectiva de los registros de representación semiótica (Duval, 2006), la construcción es solo una parte del proceso. La verdadera comprensión surge cuando el estudiante coordina lo visual (la figura que se mueve) con lo verbal (la definición explicada) y lo simbólico (las propiedades de paralelismo y perpendicularidad). Esta transición no es automática; requiere una intervención docente que fuerce al estudiante a traducir sus acciones en argumentos.

Hasta aquí es conveniente subrayar que un uso didácticamente potente de GeoGebra exige evitar la fascinación por la tecnología en sí misma. La cuestión central no es cuántas funciones del programa se utilicen, sino qué tipo de actividad intelectual se promueve con ellas. GeoGebra se empobrece cuando se convierte en un recetario de pasos o en una simple confirmación visual; en cambio, adquiere su máximo valor cuando:

- Ayuda a plantear problemas genuinos.
- Permite explorar invariantes en medio del cambio.
- Abre la necesidad lógica de argumentar y validar.

No se trata de usar GeoGebra mucho, sino de usarlo con intencionalidad. Su valor no reside en la novedad tecnológica, sino en la posibilidad de convertir la clase de geometría en un laboratorio donde los estudiantes no solo vean figuras, sino que aprendan a producirlas, interrogarlas y comprenderlas (Hohenwarter y Jones, 2007; Jones, 2005; Laborde, 2000).

Síntesis del apartado

Los cinco riesgos analizados convergen en una misma advertencia: la presencia de GeoGebra en el aula no garantiza, por sí sola, comprensión matemática. Cuando la actividad se reduce a seguir pasos, cuando la observación se confunde con la demostración, cuando la atención se desvía hacia lo accesorio, cuando la clase se transforma en exhibición docente o cuando la construcción correcta se asume como prueba de comprensión, el entorno dinámico pierde su potencial didáctico y se convierte en un recurso vistoso pero estéril. Estos riesgos no provienen de la herramienta misma, sino de las decisiones que la rodean. Por ello, el desafío del docente no consiste en usar GeoGebra más, sino en usarlo con intencionalidad: planteando problemas genuinos, exigiendo argumentación y manteniendo el foco en las relaciones geométricas que se quieren comprender. Sin esa intención didáctica, la modernidad del recurso convive con la pobreza del aprendizaje.

4.4. Criterios para decidir cuándo y para qué usar GeoGebra

La integración de GeoGebra en la enseñanza no debería responder a la novedad tecnológica ni al atractivo visual del entorno, sino a una necesidad didáctica clara. Su uso resulta pertinente cuando permite hacer visible una relación geométrica, enriquecer una forma de exploración o sostener una actividad intelectual que difícilmente podría desarrollarse del mismo modo con lápiz y papel. Por ello, la decisión de usar GeoGebra





no debería partir de la pregunta ¿cómo incorporo el programa en esta clase?, sino más bien de esta otra, ¿qué tipo de comprensión quiero promover y qué aporta aquí el entorno dinámico? Para orientar esta decisión, proponemos cuatro criterios de pertinencia:

1. El criterio de la variación

GeoGebra adquiere especial valor cuando el aprendizaje depende de observar no un caso aislado, sino una familia de configuraciones. Si la actividad se limita a trabajar un único caso estático, muchas veces el papel, la pizarra o un esquema bien diseñado resultan suficientes. En cambio, cuando el concepto exige ver cómo una figura se transforma, se deforma o cambia de posición sin perder ciertas relaciones, el entorno dinámico ofrece una ventaja didáctica clara.

La pregunta clave aquí es: ¿el estudiante necesita observar múltiples variaciones de una misma configuración para comprender la idea matemática?

Por ejemplo, calcular el área de un triángulo con base y altura dadas puede resolverse adecuadamente en papel. En cambio, explorar qué ocurre con la suma de los ángulos interiores cuando cambia la forma del triángulo exige una experiencia de variación que GeoGebra facilita de manera especialmente potente.

2. El criterio de la invariancia

Este es uno de los criterios más potentes para justificar el uso de GeoGebra. El entorno dinámico resulta especialmente pertinente cuando el objetivo es que el estudiante identifique una propiedad que permanece a pesar de las transformaciones de la figura. En otras palabras, cuando el aprendizaje depende de distinguir entre lo que cambia y lo que se conserva.

La pregunta clave aquí es: ¿la tarea exige reconocer una relación que permanece invariante aun cuando la figura se mueve, se deforma o cambia de orientación?

Este criterio es central en la enseñanza de la geometría, porque muchas comprensiones profundas nacen precisamente del reconocimiento de invariantes: que un cuadrado sigue siendo cuadrado, aunque gire, que las medianas de un triángulo concurren en un punto, aunque cambie la forma del triángulo, o que ciertas relaciones de proporcionalidad se conservan en configuraciones dinámicas.

3. El criterio de la retroalimentación

GeoGebra también resulta valioso cuando la propia construcción ofrece al estudiante una retroalimentación inmediata sobre la validez de su procedimiento. Si una figura se desarma al arrastrarla, eso indica que la propiedad no ha sido realmente garantizada; si resiste, la construcción ha sido establecida bajo relaciones geométricas más sólidas.

La pregunta clave aquí es: ¿la tarea permite que el estudiante reciba del entorno una retroalimentación inmediata sobre la solidez de su construcción?

Este criterio tiene gran valor didáctico porque desplaza parcialmente la validación desde la corrección externa del docente hacia una forma de comprobación interna de la propia actividad. Sin embargo, conviene subrayar que esta retroalimentación no sustituye la explicación matemática. Que una figura resista al arrastre no significa, por sí solo, que el estudiante comprenda plenamente por qué lo hace.

4. El criterio de la coordinación de registros

GeoGebra se vuelve especialmente pertinente cuando el contenido exige articular diferentes formas de representación. Su entorno permite vincular lo gráfico, lo numérico, lo algebraico y lo dinámico en una misma experiencia, lo cual es particularmente valioso en aquellos temas donde la comprensión depende del paso entre registros.

La pregunta clave aquí es: ¿la tarea exige que el estudiante relacione una representación geométrica





con otra simbólica, algebraica o numérica? Este criterio aparece con fuerza, por ejemplo, en geometría analítica, cuando un cambio en la representación gráfica se vincula con una modificación en la ecuación; o en el estudio de funciones y lugares geométricos, cuando el movimiento en la vista gráfica ayuda a interpretar relaciones expresadas simbólicamente.

Para facilitar la planificación, el uso de GeoGebra puede pensarse según la intencionalidad didáctica predominante de la actividad. Esto no significa que una tarea quede encerrada en una sola categoría, sino que ayuda al docente a aclarar qué espera que el entorno dinámico aporte en cada momento de la secuencia, explorar, construir, poner a prueba una conjetura o ayudar a organizar y formalizar lo aprendido (Tabla 2.2).

Tabla 2.2. Intencionalidades didácticas para el uso de GeoGebra en la enseñanza de la geometría.

Intencionalidad didáctica	¿Qué se busca promover?	¿Para qué usar GeoGebra?	Ejemplo
Exploración	Que el estudiante observe regularidades, compare casos y detecte patrones	Para variar una configuración y hacer visibles relaciones que no se advertirían fácilmente en un único caso estático	Mover los vértices de un triángulo y observar que sus medianas siempre concurren en un punto
Construcción	Que el estudiante traduzca propiedades geométricas en acciones	Para producir figuras bajo condiciones y diferenciar un dibujo aparente de una construcción válida	Construir un rombo que conserve su forma al arrastrar sus vértices

Conjetura y validación	Que el estudiante formule hipótesis y las ponga a prueba en distintos casos	Para someter una idea a variación, contrastarla y revisar si se mantiene más allá del caso prototípico	Explorar si la suma de los ángulos interiores de un triángulo se mantiene en triángulos agudos, rectángulos y obtusángulos
Institucionalización	Que el estudiante organice, nombre y relacione matemáticamente lo trabajado	Para estabilizar relaciones, precisar lenguaje y articular registros gráfico, verbal y simbólico	Relacionar la forma de una parábola con los cambios en los coeficientes de su ecuación

Síntesis del apartado

Los cuatro criterios propuestos variación, invariancia, retroalimentación y coordinación de registros constituyen un marco práctico para que el docente justifique, antes de planificar una actividad, por qué incorporar GeoGebra en ese momento específico de la enseñanza. La tabla de intencionalidades didácticas complementa esos criterios al recordar que el entorno dinámico puede cumplir funciones diversas a lo largo de una secuencia: explorar regularidades, producir figuras bajo condiciones, poner a prueba conjeturas o estabilizar relaciones ya trabajadas. La integración pertinente de la herramienta no surge de la cantidad de veces que se la utiliza, sino de la claridad con que el docente identifica qué tipo de comprensión desea promover y qué aporta el entorno dinámico que no podría lograrse de otro modo. Decidir con criterio es, en última instancia, lo que distingue la innovación didáctica auténtica del uso meramente decorativo de la tecnología

A lo largo de este capítulo se ha sostenido una idea que debe recorrer la enseñanza de la geometría con tecnología digital, GeoGebra no es valioso por lo que es, sino por lo que permite hacer pensar. Su





carácter de entorno de geometría dinámica abre posibilidades que el lápiz y papel difícilmente ofrecen, esto es, observar familias de figuras en movimiento, distinguir entre apariencia y propiedad mediante la prueba del arrastre, convertir la exploración en fuente legítima de conjeturas y articular distintos registros de representación en una misma experiencia. Sin embargo, esas mismas posibilidades pueden diluirse cuando la herramienta se reduce a una secuencia de clics, cuando la observación se confunde con la demostración o cuando la clase se convierte en una exhibición técnica sin contenido matemático.

Por ello, integrar GeoGebra con sentido didáctico no es una cuestión de frecuencia ni de novedad, sino de intencionalidad. Los criterios de variación, invariancia, retroalimentación y coordinación de registros, junto con la identificación de la intencionalidad didáctica predominante en cada actividad, ofrecen al docente un marco para decidir con fundamento cuándo y para qué utilizar el entorno dinámico. Detrás de cada construcción debería existir una pregunta matemática que la justifique y, detrás de cada arrastre, una propiedad que se busca poner a prueba.

En definitiva, el aporte más profundo de GeoGebra no consiste en mostrar la geometría con mayor precisión, sino en transformar la posición del estudiante frente al saber. Cuando la herramienta se utiliza con intención, el alumno deja de ser espectador de figuras terminadas y se convierte en productor de relaciones, intérprete de invariantes y autor de conjeturas que necesita justificar. Esa es, finalmente, la diferencia entre usar tecnología en la clase de matemática y enseñar matemática con tecnología.

Preguntas para la reflexión docente

1. Cuando planifico una clase con GeoGebra, ¿busco simplemente sustituir el papel o crear una experiencia de variación, construcción o validación que el papel no permite del mismo modo?

2. ¿Quién toma las decisiones matemáticas durante la actividad, el estudiante o la secuencia de clics ya predeterminada?
3. ¿Mis consignas orientan una exploración con significado y sentido o se reducen a instrucciones técnicas?
4. Cuando una construcción funciona, ¿pido también que el estudiante explique qué propiedades garantizan su validez?
5. Cuando una figura se desarma al arrastrarla, ¿trato ese momento como error técnico o como ocasión para discutir una relación geométrica no garantizada?
6. En mis clases con GeoGebra, ¿el énfasis está puesto en aprender a usar la herramienta o en pensar geoméricamente con ella?





Parte III. De la teoría a la acción

05.

Figuras y relaciones: rectas, ángulos y triángulos

5.1. Rectas y ángulos: primeras relaciones que estructuran el espacio

El estudio de las figuras y sus relaciones constituye un núcleo fundamental de la geometría escolar, no solo por el vocabulario que introduce, sino por la red de relaciones que permite establecer entre propiedades, definiciones y clasificaciones. Sin embargo, estos contenidos suelen enseñarse como un repertorio de nombres y figuras prototípicas, cuando en realidad ofrecen un espacio privilegiado para que los estudiantes observen, comparen, construyan, formulen conjeturas y comiencen a justificar afirmaciones geométricas (Fujita y Jones, 2007; National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

En este capítulo se abordarán, en primer lugar, las relaciones básicas entre rectas y ángulos y, luego, el papel de los triángulos como espacio para la exploración de propiedades y las primeras justificaciones. A lo largo de este recorrido, GeoGebra se integrará como una herramienta de mediación didáctica orientada a desplazar la atención desde la apariencia hacia las propiedades, y desde la mera observación hacia la argumentación (Duval, 2006; Laborde, 2000).

Bajo esta perspectiva, el software resulta especialmente importante cuando se utiliza para construir variación y provocar un conflicto cognitivo que genere la necesidad de explicar por qué una relación se mantiene a pesar del movimiento. La tecnología no debe entenderse como un fin, sino como un medio para transitar de la exploración visual hacia la validación de propiedades geométricas; un entorno que permite al estudiante experimentar con la verdad matemática antes de formalizarla (Sinclair y Robutti, 2013). Sin una mediación docente intencionada que impulse este paso desde la manipulación técnica hacia la profundidad intelectual, el uso de la herramienta corre el riesgo de quedar reducido a una simple verificación visual sin aprendizaje real.

El aprendizaje de rectas y ángulos suele estar centrado en un realismo ingenuo, el estudiante cree que una propiedad es solo lo que su vista percibe en una posición estándar o prototípica. Para romper esta rigidez representacional no basta con explicar la teoría; es necesario provocar un conflicto cognitivo en el que las certezas visuales entren en crisis al interactuar con un entorno dinámico.

El concepto de ángulo es una construcción compleja ya que es atravesada por obstáculos epistemológicos persistentes. Para muchos estudiantes, el ángulo no es una relación de abertura, sino un objeto físico limitado por sus trazos, de modo que un ángulo con lados más largos parece más grande” que otro con lados cortos,





aunque ambos tengan la misma amplitud. Estudios sobre la didáctica de la geometría señalan que el uso de entornos dinámicos permite generar un conflicto cognitivo entre lo que el estudiante percibe visualmente (por ejemplo, lados aparentemente más largos) y lo que la propiedad geométrica dicta (la conservación de la amplitud), favoreciendo la reorganización de sus esquemas de razonamiento geométrico (Duval, 2006; Fiallo y Gutiérrez, 2014; Gutiérrez y Jaime, 2015; Leung, 2014).

El valor didáctico del trabajo con GeoGebra en este apartado no reside en mostrar la medida de un ángulo, sino en hacer visible la variación dinámica. Al permitir que el estudiante manipule la longitud de los lados de manera independiente de la abertura, se facilita la transición desde una aprehensión perceptiva, donde el dibujo manda sobre el concepto, hacia una aprehensión discursiva, donde el ángulo se comprende como un invariante geométrico que no depende de la escala de su representación.

Las actividades que se presentan a continuación buscan que el software no opere como un espejo de lo que el estudiante ya sabe, sino como un provocador de preguntas. A través de la perpendicularidad, la amplitud angular, las relaciones entre rectas paralelas intersecadas por una transversal y la bisectriz como lugar geométrico, se ofrecen cuatro situaciones diseñadas para desplazar la atención desde la apariencia hacia la propiedad y desde la propiedad hacia la justificación.

- **Actividad con GeoGebra 1: Perpendicularidad sin prototipos**

Objetivo: Identificar la perpendicularidad como relación angular invariante y no como una orientación del dibujo.

Idea didáctica: Confrontar la percepción del estudiante con la propiedad de invariancia bajo rotación y la noción de dependencia lógica entre objetos geométricos.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Punto**, definir la base ubicando los puntos **A** y **B**.
2. Con la herramienta **Recta** trazar una recta **r** a partir de dos puntos, **A** y **B**. Esto permite que la recta sea móvil y rotable desde sus puntos de control.
3. Con la herramienta **Punto** en objeto, ubica un punto sobre la recta **r** y renómbralo **C**. Esto garantizará que el punto esté ligado a la recta y solo pueda moverse a lo largo de ella.
4. Con la herramienta **Recta perpendicular**, construir la recta **s** perpendicular a la recta **r**, haciendo clic en el punto **C** y luego en la recta **r**. Aquí es vital usar la herramienta específica y no trazarla a ojo, para que la propiedad se herede.
5. Con la herramienta **Punto** en objeto, ubica un punto cualquiera sobre la recta **s** (llámalo **D**). Luego, selecciona la herramienta Ángulo y haz clic en los puntos en el orden necesario (por ejemplo, un punto de la recta **r**, el vértice **C** y el punto **D**) para que GeoGebra muestre el símbolo de ángulo recto (90°), validando la propiedad.
6. Con la herramienta **Mueve** arrastrar uno de los puntos (**A** o **B**). Al rotar la recta **r**, se observará que la recta **s** rota simultáneamente, manteniendo la propiedad de perpendicularidad (ángulo de 90°) independientemente de la inclinación o posición de los objetos (Figura 5.1).



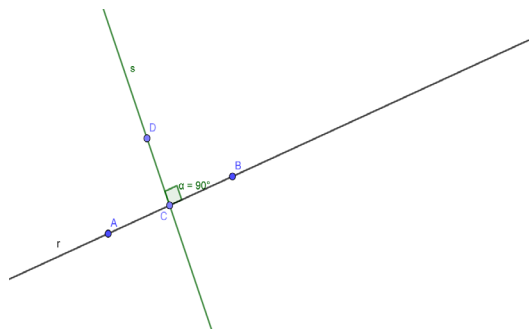


Figura 5.1. Construcción perpendicularidad sin prototipos.

Preguntas para la reflexión:

- a) **Observación:** ¿Qué cambia al girar la figura y qué permanece constante?
- b) **Comprensión:** ¿Es posible despegar la recta s para que deje de formar 90° si movemos los puntos de r? ¿Por qué?
- c) **Conjetura:** ¿La perpendicularidad es una descripción de cómo están paradas las rectas o de cómo se relacionan entre sí?

• Actividad con GeoGebra 2: El ángulo como abertura y no como longitud de los lados

Objetivo: Distinguir la amplitud de un ángulo de la longitud visible de sus lados.

Idea didáctica. Cuestionar la idea de que un ángulo es más grande porque sus lados son más largos y ayudar a que el estudiante identifique qué cambia en la representación y qué permanece como propiedad geométrica.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Deslizador**, crear un deslizador tipo **Ángulo** y cambiarle el nombre a “a” (así será más fácil de identificar que con el símbolo α).
2. Con la herramienta **Deslizador**, crear dos deslizadores de tipo **Número**, llamarlos **L1** y **L2**, con un

intervalo de 0.1 a 10), para controlar las longitudes de los lados del ángulo.

3. Usar la herramienta **Punto** y colocar un punto en la vista gráfica. Renombrarlo como **O**. Este será el vértice del ángulo.
4. Con la herramienta **Circunferencia (centro y radio)** trazar la circunferencia con centro en **O** y, radio **L1**.
5. Con la herramienta **Semirrecta** trazar una con origen en **O** hacia la derecha.
6. Con la herramienta **Intersección** marcar el punto donde la circunferencia interseca a la semirrecta, renombra este punto como **A**.
7. Con la herramienta **Segmento** trazar $\overline{OA}$.
8. Ocultar los objetos auxiliares, circunferencia y semirrecta iniciales.
9. Con la herramienta **Ángulo dada su amplitud**, hacer clic primero en el punto **A** y luego en el vértice **O**, en el cuadro de diálogo escribir el nombre del deslizador **a**. Aparecerá un punto llamado **A'**.
10. Con la herramienta **Semirrecta** trazar una con origen en **O** y que pase por el punto rotado **A'**.
11. Con la herramienta **Circunferencia (centro y radio)**, para trazar la circunferencia con centro en **O** y, radio **L2**.
12. Con la herramienta **Intersección** para marcar la intersección entre esta nueva semirrecta $\overline{OA'}$ y la circunferencia de radio **L2**. Llama a este punto **B**.
13. Ocultar los objetos auxiliares (circunferencia y semirrecta) y con la herramienta **Segmento** trazar $\overline{OB}$.
14. Mover por separado los deslizadores **L1** y **L2** para alargar o acortar los lados visibles del ángulo sin cambiar su amplitud.
15. Luego mover el deslizador **a** para observar qué elemento sí modifica la medida del ángulo.



Si se desea reforzar la comparación, construir un segundo ángulo con la misma amplitud α , pero con longitudes visibles muy distintas, y comparar ambos (Figura 5.2).

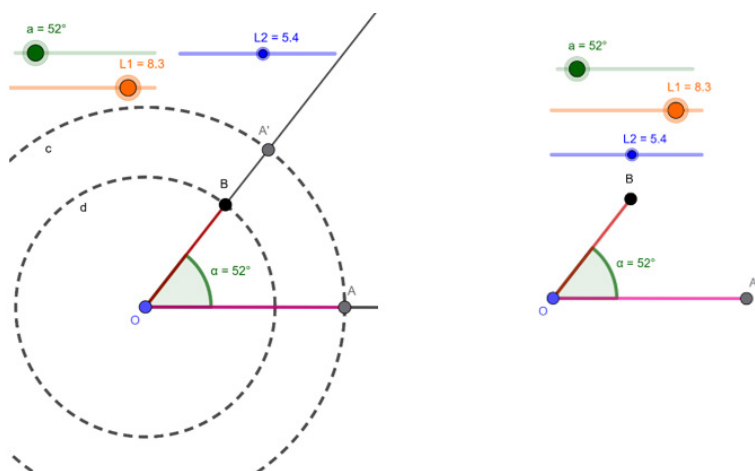


Figura 5.2. La amplitud angular se conserva, aunque cambie la longitud de los lados.

Preguntas para la reflexión

- Observación:** ¿Qué ocurre con la medida del ángulo cuando cambian $L1$ y $L2$? ¿Qué cambia en la figura cuando los lados visibles se alargan o se acortan? ¿Qué permanece igual mientras el valor de α no cambia?
- Comprensión:** ¿Qué mide exactamente la herramienta **Ángulo**: la longitud de los lados o la abertura entre las semirrectas? ¿Por qué dos ángulos pueden verse distintos y, sin embargo, tener la misma medida? ¿Qué diferencia hay entre la longitud visible de los lados y la amplitud angular?
- Conjetura:** Si prolongamos indefinidamente los lados de un ángulo, ¿su medida aumenta? ¿Podemos afirmar que la longitud de los lados no afecta la medida del ángulo? ¿Qué tendría que cambiar para que el ángulo sí modificara su medida?

• Actividad con GeoGebra 3: Rectas paralelas intersectadas por una transversal

Objetivo: Verificar que las igualdades entre ángulos correspondientes y alternos internos son consecuencia del paralelismo.

Idea didáctica. Pasar de la memorización de nombres a la identificación de invariantes bajo el arrastre de la transversal.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Definir la recta base (**r**):
 - Con la herramienta **Punto** ubicar dos puntos, **A** y **B**, en la vista gráfica.
 - Con la herramienta **Recta** trazar la recta **r** que pasa por ambos puntos.
2. Garantizar el paralelismo (**s**):
 - Con la herramienta **Punto** ubicar un tercer punto, **C**, fuera de la recta **r**.
 - Con la herramienta **Recta** paralela, trazar una recta **s** paralela a **r**, para ello haga clic primero en el punto **C** y luego en la recta **r**.
3. Construir la transversal dinámica (**t**):
 - Con la herramienta **Punto** y ubicar nuevos puntos, **D** y **E** que no pertenezcan a las rectas **r** ni a **s**.
 - Con la herramienta **Recta**, trazar la recta **t** que pasa por **D** y **E**. Al mover estos puntos, podrá rotar o desplazar la transversal con total libertad.
4. Establecer puntos de intersección:
 - Con la herramienta **Intersección** hacer clic sucesivamente sobre las rectas **r** y **t** para generar el punto **F**; repita el procedimiento con las rectas **s** y **t** para obtener el punto **G**. Estos puntos son indispensables para que GeoGebra pueda medir los ángulos correctamente.





5. Evidencia visual y numérica:
 - Con la herramienta **Ángulo** marcar los ángulos deseados haciendo clic en tres puntos (por ejemplo, un punto de la transversal, el vértice de intersección y un punto de la paralela). Aquí vale recordar que GeoGebra mide el ángulo en sentido antihorario a partir del primer punto seleccionado; si obtiene un ángulo mayor a 180° , invierta el orden de los clics.
 - Sugerencia: hacer clic derecho sobre cada ángulo, en **Propiedades** y asignar el mismo color a los ángulos que sean iguales (por ejemplo, verde para los alternos internos, azul para los correspondientes, etc.).
6. Análisis de casos especiales (exploración didáctica):
 - Desplazar la transversal hasta que visualmente parezca perpendicular a las paralelas. Observar en la vista algebraica que los ocho ángulos miden 90° (Figura 5.3).

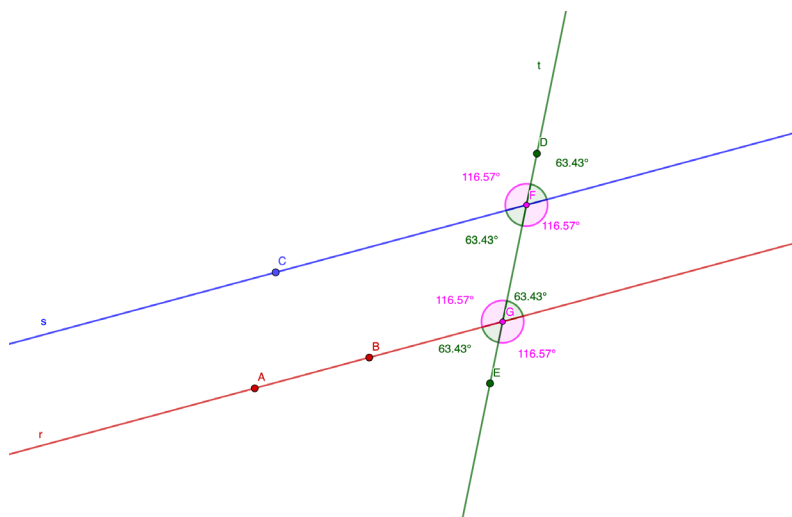


Figura 5.3. Ángulos entre paralelas.

Preguntas para la reflexión:

- a) **Observación:** Al mover la transversal, las medidas individuales cambian. Sin embargo, ¿qué sucede con las parejas del mismo color?

b) Comprensión: Si eliminamos la restricción de paralelismo en s , ¿se mantienen las igualdades? ¿De qué depende la propiedad?

c) Conjetura: Si conoces un solo ángulo de la configuración, ¿puedes deducir los otros siete? ¿Qué principios usarías?

• **Actividad con GeoGebra 4: Construir una paralela a una recta por un punto exterior**

Objetivo: Construir una recta paralela a una recta dada por un punto exterior usando la igualdad de ángulos correspondientes como criterio geométrico.

Idea didáctica: Si la igualdad de ángulos correspondientes permite reconocer que dos rectas son paralelas, entonces esa misma propiedad puede emplearse como una herramienta de construcción legítima. La actividad busca que el estudiante supere la concepción del paralelismo basada en el simple parecido visual (rectas que no se intersecan) y asimile el paralelismo a través de sus propiedades invariantes.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Punto**, ubicar dos puntos **A** y **B** en la vista gráfica.
2. Con la herramienta **Recta**, trazar una recta que pasa por **A** y **B**, renombrar la recta como r .
3. Con la herramienta **Punto**, ubicar un punto exterior a la recta r y renombrarlo como **P**.
4. Con la herramienta **Punto** en objeto, ubica un punto sobre la recta r y renombrarlo como **Q**.
5. Con la herramienta **Recta**, trazar la recta que pasa por **P** y **Q**. Renómbrala como t (esta actuará como recta transversal).
6. Con la herramienta **Ángulo**, medir el ángulo $\angle BQP$ (haciendo clic en los puntos **B**, **Q** y **P**, en ese orden). GeoGebra le asignará un nombre automático, por ejemplo, α .





7. Con la herramienta **Ángulo** dada su amplitud, haz clic primero en el punto **Q**, luego en el punto **P** (que será el vértice del nuevo ángulo). En la ventana emergente, borra el valor por defecto (45°), escribe el nombre del ángulo inicial (selecciona el símbolo α en el menú desplegable de la casilla) y selecciona el sentido horario. Al aceptar, GeoGebra creará un punto reflejado **Q'**.
8. Con la herramienta **Recta**, trazar la recta **s** que pasa por **P** y **Q'**. Esta es la recta buscada.
9. Verificación angular: Medir con la herramienta **Ángulo** medir $\angle Q'PQ$ y observar que su valor coincide con el ángulo $\alpha = \angle BQP$.
10. Verificación de control: Con la herramienta **Recta paralela**, hacer clic en el punto **P** y luego en la recta **r** y observar si la recta generada por el software coincide con la recta **s** que construiste manualmente.
11. Prueba de arrastre: Prueba de arrastre: Con la herramienta **Mueve**, arrastrar los puntos **A**, **B**, **P** o **Q** y observar el comportamiento del paralelismo de las rectas y las medidas de los ángulos (Figura 5.4).

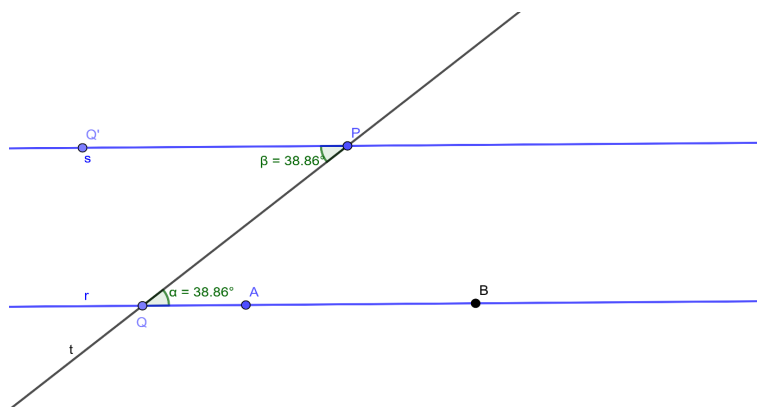


Figura 5.4. Construcción de una paralela por un punto exterior mediante igualdad de ángulos.

Nota: GeoGebra incluye una herramienta directa, Recta paralela, que produce la paralela en un solo paso. Su uso es perfectamente válido, pero oculta la propiedad que la justifica. Construir la paralela mediante la igualdad de ángulos hace visible esa propiedad y conecta directamente con la Actividad 3. Una vez comprendido el fundamento, el uso posterior de la herramienta directa queda cargado de sentido en lugar de funcionar como una caja negra.

Preguntas para la reflexión

- a) Observación:** Al arrastrar los puntos A, B, P o Q, ¿qué ocurre con la posición de la recta s? ¿Deja en algún momento de ser paralela a r? ¿Qué sucede con las amplitudes de los ángulos en Q y en P mientras mueves los objetos?
- b) Comprensión:** ¿Qué propiedad geométrica permite construir la recta paralela? ¿Por qué no basta con dibujar una recta que parezca paralela? ¿Qué diferencia hay entre dibujar una recta que parezca paralela a ojo y construirla a partir de la igualdad de ángulos?
- c) Conjetura:** Si dos rectas intersecadas por una transversal mantienen siempre ángulos correspondientes iguales, ¿es suficiente esto para asegurar que las rectas son paralelas? Si decidieras utilizar los ángulos alternos internos en lugar de los correspondientes, ¿qué pasos deberías cambiar en el procedimiento de construcción?

• Actividad con GeoGebra 5: La mediatriz como lugar geométrico

Objetivo: Construir la mediatriz de un segmento e identificarla como el lugar geométrico de los puntos equidistantes de sus extremos.

Idea didáctica: La actividad busca que el estudiante entienda la mediatriz no como un procedimiento técnico que se ejecuta paso a paso, sino como una propiedad geométrica con significado, todos sus puntos son



equidistantes de los extremos del segmento. Esta lectura prepara el estudio posterior del circuncentro del triángulo.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Punto**, ubicar dos puntos A y B en la vista gráfica.
2. Con la herramienta **Segmento**, trazar el segmento $\overline{AB}$.
3. Con la herramienta **Deslizador**, crear un deslizador r, de modo que su valor sea mayor que la mitad de la longitud de $\overline{AB}$. Este deslizador controlará el radio de las circunferencias auxiliares.
4. Con la herramienta **Circunferencia (centro y radio)**, trazar una circunferencia con centro en **A** y radio **r**, y otra con centro en **B** y el mismo radio **r**.
5. Con la herramienta **Intersección**, marcar los dos puntos donde se intersecan ambas circunferencias. Renombrarlos M y N.
6. Con la herramienta **Recta**, trazar la recta que pasa por **M** y **N**. Esa recta es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.
7. Con la herramienta **Punto** sobre objeto, ubicar un punto sobre la recta que pasa por MN y renombrarlo como **P**.
8. Con la herramienta **Distancia** o **Longitud**, medir $|\overline{PA}|$ y $|\overline{PB}|$ y compararlas.
9. Con la herramienta **Mueve**, deslizar el punto **P** a lo largo de la mediatriz y observar qué ocurre con las distancias $|\overline{PA}|$ y $|\overline{PB}|$. Mover también **P** fuera de la recta y observar qué cambia.
10. Luego, con la herramienta **Punto**, ubicar un punto libre fuera de la recta MN y renombrarlo **Q**.
11. Con la herramienta **Distancia** o **Longitud**, medir $|\overline{QA}|$ y $|\overline{QB}|$, y comparar esos valores.



12. Analizar qué ocurre cuando un punto pertenece a la mediatriz y qué ocurre cuando no pertenece a ella (Figura 5.5).

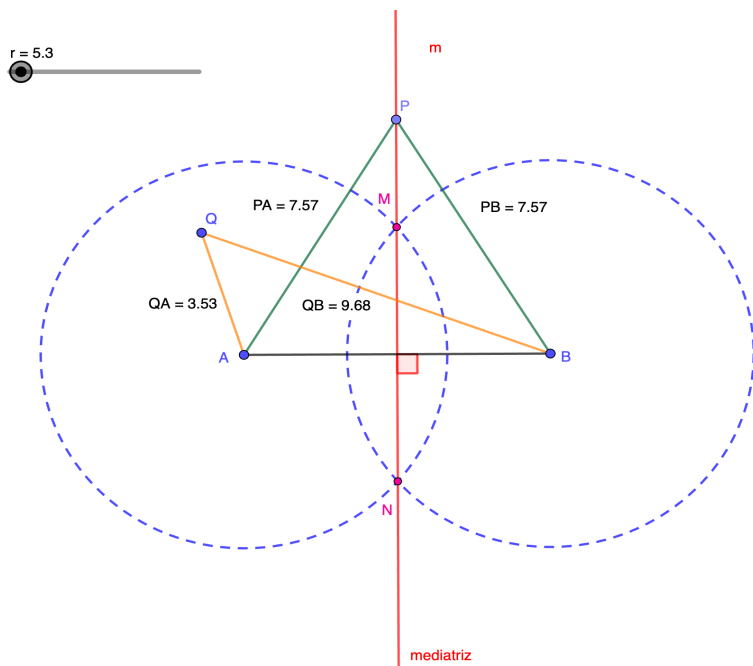


Figura 5.5. La mediatriz como lugar geométrico.

Nota: La mediatriz puede entenderse como la pareja conceptual de la bisectriz: ambas son lugares geométricos definidos por una condición de equidistancia, aunque en un caso esa equidistancia se establece respecto de dos puntos y, en el otro, respecto de dos rectas. Esta actividad prepara el estudio del circuncentro del triángulo, pues las mediatrices de sus lados se intersecan en el único punto equidistante de los tres vértices.

Preguntas para la reflexión:

a) Observación: ¿Qué relación hay entre $|PA|$ y $|PB|$ cuando P recorre la mediatriz? ¿Se mantiene en todos los puntos? ¿Qué ocurre con las distancias $|QA|$ y $|QB|$ cuando el punto Q se ubica fuera de la mediatriz?





b) Comprensión: ¿Por qué los puntos de la mediatriz están a igual distancia de A y B? ¿Qué diferencia hay entre un punto sobre la mediatriz y un punto exterior a ella?

c) Conjetura: ¿Podemos afirmar que la mediatriz es el conjunto de todos los puntos del plano equidistantes de A y B? ¿¿Cómo justificarías que un punto fuera de esa recta no cumple $|\overline{QA}| = |\overline{QB}|$?¿

• **Actividad con GeoGebra 6: La bisectriz como lugar geométrico**

Objetivo: Identificar la bisectriz de un ángulo como el conjunto de puntos equidistantes de sus lados.

Idea didáctica: Desplazar el foco desde la apariencia del trazo hacia la propiedad de los puntos que lo integran: la equidistancia respecto de los lados del ángulo.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Definir el ángulo:

- Con la herramienta **Punto** ubicar tres puntos en la vista gráfica: **A**, **O** y **B**, donde **O** será el vértice.
- Con la herramienta **Semirrecta**, trazar las semirrectas con origen en **O** que pasen por **A** y por **B**, respectivamente. Estas semirrectas son los lados del ángulo $\angle AOB$.

2. Trazar la bisectriz:

- Con la herramienta **Bisectriz** hacer clic sucesivamente en los puntos **A**, **O** y **B** (en ese orden, con el vértice en medio). GeoGebra trazará la recta bisectriz del ángulo. De manera equivalente, puede seleccionar directamente las dos semirrectas que forman el ángulo.

3. Construir las distancias a los lados del ángulo:

- Con la herramienta **Punto en objeto** ubicar un punto **P** sobre la bisectriz.
 - Con la herramienta **Recta perpendicular**, trazar una perpendicular desde **P** a cada lado del ángulo.
 - Con la herramienta **Intersección** marcar los puntos **C** (intersección con el lado **OA**) y **D** (intersección con el lado).
4. Evidencia dinámica:
- Con la herramienta **Segmento**, construir $\overline{PC}$ y $\overline{PD}$, que representan las distancias de **P** a cada lado.
 - Con Herramienta **Distancia o Longitud** medir longitud de los segmentos $\overline{PC}$ y $\overline{PD}$.
5. Exploración:
- Con la herramienta **Mueve** arrastrar el punto **P** a lo largo de la bisectriz y observar la invariancia de la igualdad de distancias.
 - Verificar en la vista algebraica que los valores de $\overline{PC}$ y $\overline{PD}$ permanecen iguales hasta la última cifra decimal mostrada, sin importar la posición de **P** (Figura 5.6).

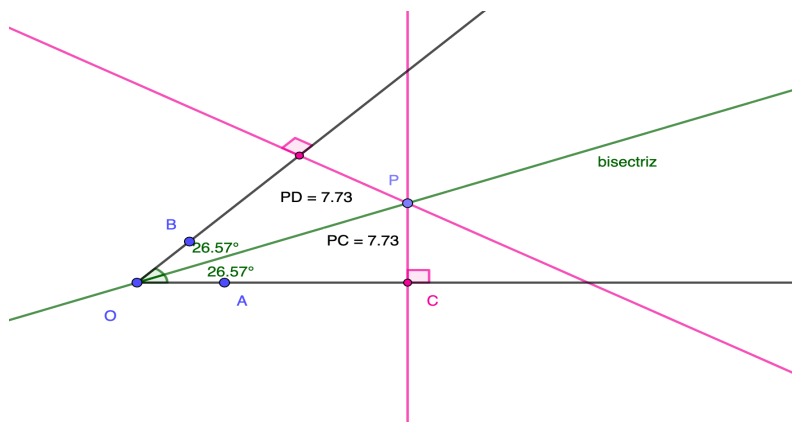


Figura 5.6. La bisectriz como lugar geométrico.





Preguntas para la reflexión:

- a) Observación:** Mientras mueves el punto **P** sobre la bisectriz, ¿qué relación hay entre las dos distancias medidas?
- b) Comprensión:** Si intentas colocar un punto fuera de esa línea, ¿es posible que esté a la misma distancia de ambos lados?
- c) Conjetura:** ¿Cómo definirías la bisectriz usando solo la palabra distancia?

Síntesis del apartado

Las cuatro actividades buscan desplazar la mirada del estudiante desde la apariencia visual hacia la propiedad geométrica que la sustenta. Se trabaja la perpendicularidad como invariante bajo rotación, el ángulo como abertura independiente de la longitud de los lados, las igualdades angulares como consecuencia necesaria del paralelismo, y la bisectriz como lugar geométrico de equidistancia. El apartado articula tres ideas transversales: la noción de invariante geométrico, la dependencia lógica entre objetos construidos, y la concepción de los objetos como lugares geométricos definidos por una propiedad común.

5.2. Triángulos: clasificación y relaciones

Los triángulos ocupan un lugar privilegiado en la enseñanza de la geometría porque concentran una gran cantidad de propiedades y posibilidades de argumentación. Sin embargo, su aprendizaje suele limitarse a la memorización de nombres (isósceles, escaleno, obtusángulo) sin que los estudiantes lleguen a comprender las relaciones que los definen. Al igual que con las rectas y los ángulos, es frecuente que el estudiante identifique un triángulo por su apariencia prototípica, por ejemplo, asumiendo que un triángulo isósceles siempre se apoya sobre su lado desigual. Desde una perspectiva didáctica, conviene tratar los triángulos como objetos de exploración.

El uso de GeoGebra permite pasar de la percepción a la conjetura, exigiendo que el estudiante justifique por qué ciertas relaciones se mantienen a pesar del arrastre. Las actividades que siguen abordan la desigualdad triangular, las relaciones entre lados y ángulos, la suma de los ángulos internos, la clasificación inclusiva y los puntos notables del triángulo: baricentro, circuncentro, incentro y ortocentro. Cada una de ellas busca desplazar la atención desde el triángulo como dibujo hacia el triángulo como sistema de relaciones.

- **Actividad con GeoGebra 1: La suma de los ángulos internos: el invariante 180° .**

Objetivo: Formular la conjetura de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es constante e igual a 180° .

Idea didáctica: El arrastre de GeoGebra permite ver cientos de triángulos en segundos. La repetición constante del valor 180° en la suma actúa como un potente generador de conjeturas.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Trazar un triángulo cualquiera **ABC** usando la herramienta **Polígono**.
2. Con la herramienta **Ángulo** obtener α , β y γ .
3. En la barra de entrada, crear una variable que sume los tres ángulos, por ejemplo: **Suma** = $\alpha + \beta + \gamma$.
4. Con la herramienta **Texto** hacer clic en una zona libre de la **Vista Gráfica**. Escribir **Suma** = γ usar el botón **Objetos** (que tiene el icono de GeoGebra) y buscar en la lista para insertar los símbolos α , β y γ intercalados con el signo +. Marca Fórmula LaTeX y pulsa OK.
5. Con la **Mueve** arrastrar libremente cualquiera de los vértices del triángulo para generar triángulos muy obtusos, muy agudos o casi planos (Figura 5.7).



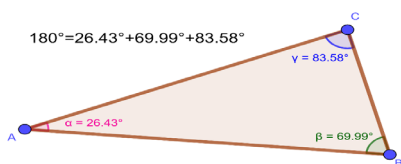


Figura 5.7. La suma de los ángulos internos.

Preguntas para la reflexión:

- a) **Observación:** Los tres ángulos cambian constantemente al mover los vértices, pero ¿qué ocurre con el valor de la Suma?
- b) **Comprensión:** Si un ángulo aumenta, ¿qué debe suceder con los otros dos para que el total no cambie?
- c) **Conjetura:** ¿Existirá algún triángulo en el plano donde la suma sea diferente a **180°**?
- **Actividad con GeoGebra 2: El triángulo isósceles con deslizadores.**

Objetivo: Identificar la relación entre los lados iguales de un triángulo isósceles y la igualdad de sus ángulos de base.

Idea didáctica: Utilizar deslizadores para aislar variables. Al variar la longitud de los lados sin cambiar el ángulo comprendido, el estudiante advierte que propiedades permanecen invariantes.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta Deslizador construir uno tipo **Número** llamado **s**, con valores entre **1** y **10** (longitud de los lados iguales).
2. Con la herramienta **Deslizador** construir un segundo deslizador, llamado **a**, configurado como ángulo, con valores entre **0°** y **180°**.
3. Con la herramienta **Punto** ubicar un punto **A** en la vista gráfica.



4. Con la herramienta **Segmento de longitud** dada, haga clic en **A** y escribir s como longitud. GeoGebra generará el segmento $\overline{AB}$, con **B** a distancia s de **A**.
5. Con la herramienta **Rotación**, seleccionar el punto **B**, luego el centro de rotación **A**, y escriba a como ángulo de rotación a . Se obtiene un nuevo punto, al que conviene renombrar como **C**.
6. Con la herramienta **Polígono**, unir los puntos **A**, **B** y **C** para formar el triángulo. Por construcción, los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ tienen la misma longitud s , y el ángulo en **A** (vértice) mide a .
7. Con la herramienta **Ángulo** determinar la amplitud de los ángulos **A**, **B** y **C**. Estos son los ángulos de la base, opuestos a los lados iguales.
8. Mover el deslizador s manteniendo a constante. Observar cómo el triángulo crece o se encoge, y registrar lo que ocurre con las medidas de los ángulos de la base.
9. Mover el deslizador a manteniendo s constante. Observar cómo cambia la forma del triángulo y registrar cómo se modifican los ángulos de la base, prestando atención a la relación entre ellos (Figura 5.8).

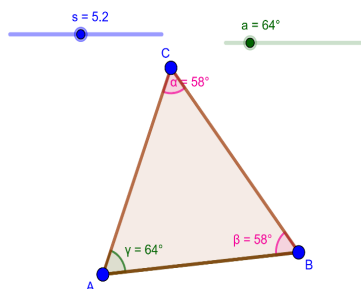


Figura 5.8. Construcción dinámica del triángulo isósceles.

Preguntas para la reflexión:

- a) Observación:** Al variar s con a fijo, ¿qué sucede con las medidas de los ángulos de la base? ¿Por



qué crees que ocurre eso, si la figura efectivamente cambia de tamaño? Al variar **a** con **s** fijo, los ángulos de la base sí cambian. Sin embargo, ¿qué relación se mantiene entre ellos en todo momento?

b) Comprensión: Si un triángulo tiene dos lados iguales, ¿qué podemos asegurar de sus ángulos sin necesidad de medirlos cada vez?

c) Conjetura: Si llamamos β a cada uno de los ángulos de la base y α al ángulo del vértice, ¿puedes proponer una fórmula que relacione **a** con β ? (Sugerencia, utiliza lo que sabes sobre la suma de los ángulos internos de un triángulo).

• **Actividad con GeoGebra 3: Clasificación inclusiva: ¿El equilátero es isósceles?**

Objetivo: Construir una clasificación inclusiva de los triángulos y reconocer que todo triángulo equilátero es también isósceles.

Idea didáctica: Utilizar la construcción dinámica de la Actividad 2 para producir un conflicto cognitivo: un mismo objeto cumple con dos definiciones simultáneamente. El descubrimiento surge al ajustar un parámetro hasta encontrar una configuración límite especial.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Retomar la construcción anterior: Abrir el archivo de GeoGebra correspondiente a la Actividad 2 (triángulo isósceles **ABC** con deslizadores **s** y **a**) o repetir la construcción siguiendo los mismos pasos.
2. Medir el tercer lado:
 - Seleccionar la herramienta **Distancia o Longitud** y hacer clic sobre el segmento $\overline{BC}$ (el lado opuesto al vértice **A**). Este valor numérico se actualizará al mover los deslizadores.



- Comparar ese valor con **s**, la longitud común de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, visible en la vista algebraica.
3. Buscar la igualdad de los tres lados:
 - Mover lentamente el deslizador **a**, manteniendo **s** constante, hasta que la longitud de $\overline{BC}$ coincida con **s**. Anotar el valor de **a** para el cual ocurre esta igualdad.
 - Observar simultáneamente las medidas de los tres ángulos del triángulo (los marcados en la Actividad 2). Registrar sus valores en el momento en que los tres lados coinciden.
 4. Verificar analíticamente:
 - Verificar que, en ese caso, los tres ángulos miden exactamente 60° y los tres lados son iguales a **s**. Esta es la configuración del triángulo equilátero.
 - Comprobar que, al obtener este triángulo, las dos condiciones se cumplen simultáneamente, o sea, el triángulo sigue siendo isósceles (tiene al menos dos lados iguales, de hecho, tres) y, además, es equilátero.
 5. Discusión guiada:
 - Plantear la pregunta central, si la definición de triángulo isósceles es tener al menos dos lados iguales, entonces todo equilátero también es isósceles, porque cumple esa condición y la supera. ¿Vale también la afirmación inversa: todo isósceles es equilátero?
 - Construir colectivamente el diagrama de inclusión, el conjunto de los equiláteros está contenido dentro del conjunto de los isósceles, que a su vez está contenido en el conjunto de todos los triángulos (Figura 5.9).



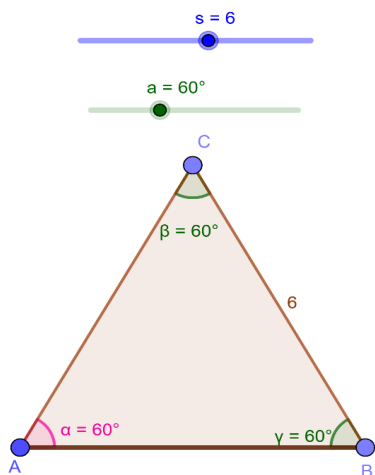


Figura 5.9. El triángulo equilátero como caso particular del isósceles ($\alpha = 60^\circ$).

Preguntas para la reflexión:

- a) **Observación:** ¿Para qué valor exacto del ángulo α el triángulo isósceles se vuelve equilátero? ¿Qué relación tiene este valor con los 180° de la suma total de los ángulos internos?
- b) **Comprensión:** Bajo la definición exclusiva (triángulo con exactamente dos lados iguales), ¿el equilátero es isósceles? Bajo la definición inclusiva (triángulo con al menos dos lados iguales), ¿lo es? ¿Cuál de las dos definiciones permite formular más relaciones geométricas y por qué?
- c) **Conjetura:** A partir de lo trabajado, ¿podrías afirmar que todo equilátero es isósceles? ¿Y que todo isósceles es equilátero? ¿Qué propiedad geométrica permite que la primera afirmación sea verdadera y la segunda no? Formula una regla general que distinga ambas direcciones de la inclusión.
- d) **Clasificación jerárquica:** Dibuja un diagrama que represente la relación de inclusión entre los conjuntos triángulos, triángulos isósceles y triángulos



equiláteros. ¿Dónde se ubicaría el conjunto de los triángulos escalenos (sin lados iguales)?

- **Actividad con GeoGebra 4: La desigualdad triangular.**

Objetivo: Verificar la desigualdad triangular como condición necesaria para la existencia de un triángulo.

Idea didáctica: Provocar un conflicto cognitivo al intentar construir un triángulo con segmentos cuyas medidas imposibiliten el cierre de la figura, rompiendo la idea de que tres segmentos cualesquiera forman un triángulo.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Deslizador**, crear tres deslizadores tipo **Número** llamados **a**, **b** y **c**, con valores entre **1** y **10**. Estos representarán las longitudes de los tres lados del triángulo.
2. Con la herramienta **Punto**, **marcar** un punto **A** en la vista gráfica.
3. Con la herramienta **Segmento de longitud dada**, hacer clic en **A** y escribir **a** como longitud. GeoGebra generará el segmento **AB**, con **B** a distancia de **A**. Este será uno de los lados del triángulo.
4. Con la herramienta **Circunferencia (centro, radio)**, hacer clic en **A** y escribir **b** como radio. El tercer vértice estará a distancia **b** del punto **A**, es decir, en algún lugar de esta circunferencia.
5. Repetir el procedimiento haciendo clic en **B** y escribiendo **c** como radio. El tercer vértice también estará a distancia **c** del punto **B**, es decir, en algún lugar de esta segunda circunferencia.
6. Con la herramienta **Intersección**, seleccionar las dos circunferencias. Si se intersecan, GeoGebra generará dos puntos de intersección (uno por encima y otro por debajo del segmento **AB**). Tomar el punto superior y renombrarlo como **C**.





Advertencia importante, si las circunferencias no se intersecan, GeoGebra no genera el punto **C** y aparecerá como indefinido en la vista algebraica. Esto no es un error del

7. Con la herramienta **Polígono**, unir los puntos **A**, **B** y **C** para formar el triángulo.
8. programa, sino la respuesta correcta, el triángulo no existe para esa combinación de medidas.
9. Probar sucesivamente las siguientes combinaciones moviendo los deslizadores y registrar en una tabla qué ocurre en cada caso (Tabla 5.1):

Tabla 5.1. Comprobación de la existencia de triángulos según las longitudes de sus lados.

Caso	a	b	c	¿Aparece C?	¿Existe el triángulo?
1	3	4	5		
2	5	5	5		
3	1	1	5		
4	6	3	2		
5	4	5	9		
6	7	4	4		

Ajustar los deslizadores para que la suma de dos lados sea exactamente igual al tercero (por ejemplo, **a = 6**, **b = 4**, **c = 2**). Observe que las dos circunferencias se vuelven tangentes: se tocan en un único punto situado sobre el segmento **AB**. En este caso, el triángulo colapsa en un segmento: los tres puntos **A**, **B** y **C** son colineales, y la figura tiene área cero. Reflexione si esto debe considerarse o no un triángulo (Figura 5.10).

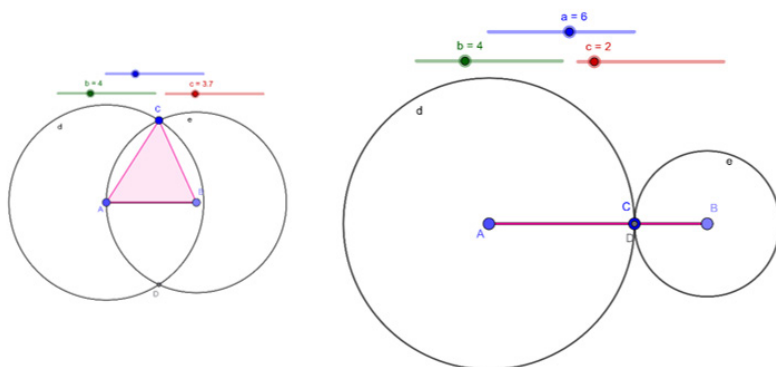


Figura 5.10. Verificación de la desigualdad triangular.

Preguntas para la reflexión:

- a) Observación:** Revisar la tabla del paso 9. Para los casos en que el triángulo sí existe, ¿qué relación numérica observa entre la medida de un lado y la suma de los otros dos? Para los casos en que no existe, ¿qué ocurre con esa relación?
- b) Conjetura:** Completar la siguiente afirmación con base en las observaciones: “Tres segmentos de longitudes **a**, **b** y **c** pueden formar un triángulo si y solo si _____.” (desigualdad triangular).
- c) Caso límite:** Cuando la suma de dos lados es exactamente igual al tercero, ¿el resultado es un triángulo, un segmento o una figura intermedia? ¿Por qué cree que este caso suele excluirse de la definición de triángulo?
- d) Aplicación:** Sin construir la figura, decida si las siguientes ternas pueden formar un triángulo y justifica:
- (8, 3, 4)
 - (7, 7, 7)
 - (10, 5, 5)
 - (2.5, 3.1, 5.0)





e) Generalización: Si se quisiera construir un cuadrilátero con cuatro lados de longitudes dadas, ¿cree que existe una restricción análoga sobre las medidas? Investigue.

Síntesis del apartado

Las actividades conducen al estudiante de una mirada figurativa a una mirada estructural del triángulo. Se establece el invariante de los 180° , la dependencia entre lados y ángulos en el isósceles, la clasificación inclusiva que reconoce al equilátero como caso particular del isósceles, y la desigualdad triangular como condición de existencia. El triángulo deja de ser una figura cerrada para comprenderse como una estructura relacional cuyas propiedades pueden formularse, justificarse y demostrarse.

5.3. Rectas y puntos notables del triángulo

El estudio de las rectas notables asociadas a un triángulo, esto es, medianas, mediatrices, bisectrices y alturas, constituye uno de los núcleos clásicos de la geometría euclidiana elemental y, simultáneamente, uno de los más fértiles para el desarrollo del razonamiento geométrico. Cada una de estas familias de rectas se define a partir de una operación geométrica elemental sobre los elementos del triángulo: la unión de un vértice con el punto medio del lado opuesto (medianas), la perpendicularidad por el punto medio de cada lado (mediatrices), la bisección de cada ángulo interno (bisectrices) y la perpendicularidad desde un vértice a la recta que contiene el lado opuesto (alturas). Lo notable, y lo que justifica el adjetivo que las distingue, es que, en los cuatro casos, las tres rectas resultan concurrentes: convergen en un único punto del plano, llamado respectivamente baricentro, circuncentro, incentro y ortocentro.

Esta concurrencia no es trivial ni casual. Cada uno de los cuatro puntos notables admite una caracterización propia que trasciende el método de su construcción y

revela su naturaleza geométrica profunda. El baricentro es el centroide o centro de masas del triángulo, y divide cada mediana en razón 2:1. El circuncentro equidista de los tres vértices y es, por tanto, el centro de la circunferencia circunscrita. El incentro equidista de los tres lados y es el centro de la circunferencia inscrita, tangente a cada uno de ellos. El ortocentro es el punto de concurrencia de las tres alturas y, junto con el baricentro y el circuncentro, define una alineación notable conocida como la recta de Euler. Cada punto, en consecuencia, no se reduce a una construcción geométrica particular: encarna una propiedad relacional que articula la estructura interna del triángulo.

Las cuatro actividades que componen este apartado han sido diseñadas para que el estudiante descubra estas propiedades por vía experimental, mediante la mediación dinámica que ofrece GeoGebra. La estrategia metodológica común consiste en construir las rectas notables con las herramientas correspondientes, identificar el punto de concurrencia, medir las magnitudes relevantes (distancias, razones) y, sobre todo, arrastrar los vértices del triángulo para verificar qué propiedades permanecen invariantes y cuáles dependen del tipo de triángulo. Este procedimiento, característico de la geometría dinámica, permite que el estudiante distinga lo accidental, esto es, la forma particular que el triángulo asume en un instante, de lo necesario, es decir, las propiedades que se conservan bajo una deformación continua, y construya así conjeturas geométricas con fundamento empírico.

A lo largo del apartado se articulan tres propiedades transversales que conviene anticipar al lector. La primera es la concurrencia, que se cumple en los cuatro casos, pero por razones distintas en cada uno, lo que invita a buscar argumentaciones específicas. La segunda es la equidistancia, que vincula al circuncentro con los vértices y al incentro con los lados, y que conecta este apartado con la noción de lugar geométrico introducida previamente: cada uno de estos puntos





puede caracterizarse no solo por su construcción, sino también por la propiedad de distancia que lo define. La tercera es la variabilidad posicional según el tipo de triángulo: mientras el baricentro y el incentro permanecen siempre en el interior del triángulo, el circuncentro y el ortocentro pueden ubicarse dentro, sobre un lado (en el caso rectángulo) o fuera (en el caso obtusángulo), lo que establece una conexión inesperada entre la clasificación angular del triángulo y la geometría de sus puntos notables.

El apartado concluye con una síntesis integradora que retoma los cuatro puntos en una misma figura. El triángulo equilátero ofrece el caso límite más expresivo: en él, los cuatro puntos notables coinciden en un único punto, manifestación geométrica de la simetría máxima de la figura. Esta coincidencia no es solo una curiosidad, sino una invitación a comprender que las propiedades estudiadas a lo largo del apartado, esto es, concurrencia, equidistancia y posición, no son fenómenos aislados, sino expresiones diferentes de una misma estructura subyacente: la del triángulo entendido como un sistema de relaciones internas susceptible de análisis, conjetura y demostración.

• **Actividad con GeoGebra 1: Medianas y baricentro.**

Objetivo: Identificar el baricentro como punto de concurrencia de las medianas y verificar su división en razón 2:1.

Idea didáctica: Promover el reconocimiento de una propiedad invariante mediante el arrastre. Aunque el triángulo cambie de forma, la razón entre los segmentos en que el baricentro divide cada mediana permanece constante, lo que permite formular una conjetura geométrica precisa.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Polígono** construir el triángulo **ABC**.

2. Con la herramienta **Medio o centro** aplicarla a cada lado del triángulo.

3. Renombrar los puntos resultantes de la siguiente manera:

- M_1 = punto medio del lado $\overline{BC}$ (opuesto al vértice A).

- M_2 = punto medio del lado $\overline{CA}$ (opuesto al vértice B).

- M_3 = punto medio del lado $\overline{AB}$ (opuesto al vértice C).

Nota: Para cambiar de E a M_1 , seleccionar Renombrar, para escribir los subíndices, usar la sintaxis M_1 , M_2 , M_3 y GeoGebra los renderiza automáticamente como M_1 , M_2 , M_3 .

4. Con la herramienta **Segmento**, trazar las tres medianas: $\overline{AM_1}$, $\overline{BM_2}$ y $\overline{CM_3}$ (cada una une un vértice con el punto medio del lado opuesto).

5. Con la herramienta **Intersección**, seleccionar dos de las tres medianas (por ejemplo, $\overline{AM_1}$ y $\overline{BM_2}$). Renombrar el punto de intersección como **G**; este es el baricentro del triángulo.

6. Verificar visualmente que la tercera mediana, $\overline{CM_3}$, también pasa exactamente por **G**. Esta concurrencia de las tres medianas es una propiedad notable que se cumple en cualquier triángulo.

7. En la **Barra de Entrada**, escribir la expresión y presionar **Enter** para definir el cociente entre los dos segmentos en que **G** divide la mediana $\overline{AM_1}$:

$$\text{razon}_1 = \text{Distancia}(A, G) / \text{Distancia}(G, M_1)$$

8. Repita el cálculo para las otras dos medianas:

$$\text{razon}_2 = \text{Distancia}(B, G) / \text{Distancia}(G, M_2)$$

$$\text{razon}_3 = \text{Distancia}(C, G) / \text{Distancia}(G, M_3)$$

9. Verificar en la **Vista Algebraica** que los tres cocientes muestran el mismo valor.

10. Seleccionar la herramienta **Texto**:





- En la ventana que aparece, escribir la parte estática: **AG / GM₁** =
- El paso crucial: No escribir **razon1**, sino hacer clic en el botón **Objetos** (que tiene el icono de GeoGebra) y buscar en la lista el nombre **razon1**. Confirmar con OK.

- 11.Exploración: Cambiar la forma del triángulo arrastrando con **Mueve** los vértices **A**, **B** o **C**. Observar el valor del cociente: ¿cambia o permanece constante? Verificar también que las tres razones (de las tres medianas) coinciden entre sí en todo momento.
- 12.Interpretación física: Recortar mentalmente el triángulo en cartulina. El punto **G** es el único punto donde podría sostenerse la cartulina con un alfiler sin que se caiga, es su centro de gravedad o centroide (Figura 5.11).

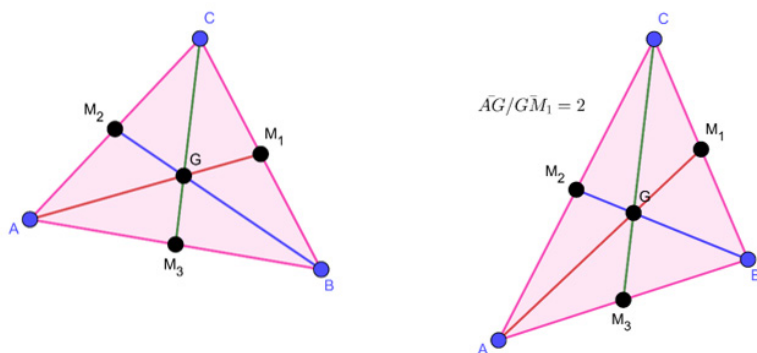


Figura 5.11. Triángulo ABC con sus tres medianas concurrentes en el baricentro G.

Preguntas para la reflexión:

- Observación:** ¿Qué valor numérico muestra el cociente $\overline{AG} / \overline{GM}_1$ en su construcción? ¿Cambia ese valor al deformar el triángulo? ¿Coincide con el valor que muestran los cocientes **BG/GM₂** y **CG/GM₃**?
- Comprensión:** Complete la siguiente afirmación con base en lo observado: En todo triángulo, el baricentro divide cada mediana en dos segmentos

tales que el segmento más cercano al vértice mide _____ veces el segmento más cercano al punto medio del lado opuesto. Si recortara el triángulo en cartulina, ¿por qué el punto G es el único donde podría sostenerlo con un alfiler sin que se caiga? ¿Qué relación existe entre la propiedad geométrica (razón 2:1) y la propiedad física (equilibrio)?

- c) Conjetura:** Arrastre los vértices del triángulo hasta convertirlo en obtusángulo (con un ángulo mayor de 90°). ¿El baricentro queda dentro o fuera del triángulo? ¿Puede explicar por qué, a diferencia de otros puntos notables, el baricentro siempre permanece en el interior?

• Actividad con GeoGebra 2: Mediatrices y circuncentro.

Objetivo: Identificar el circuncentro como punto de intersección de las mediatrices y como centro de la circunferencia circunscrita.

Idea didáctica: Articular la idea de equidistancia a partir de que, cada punto de la mediatriz de **AB** equidista de **A** y **B**; el punto donde se intersecan las mediatrices de **AB** y **BC** equidista simultáneamente de **A**, **B** y **C**. Esa equidistancia justifica que desde ese punto pueda trazarse una circunferencia que pasa por los tres vértices: la circunferencia circunscrita.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Polígono** trazar el triángulo **ABC**.
2. Con la herramienta **Mediatriz** hacer clic sucesivamente sobre cada uno de los tres lados del triángulo: **$\overline{AB}$** , **$\overline{BC}$** y **$\overline{CA}$** . GeoGebra trazará las tres rectas mediatrices, cada una perpendicular al lado correspondiente y pasando por su punto medio.
3. Con la herramienta **Intersección**, seleccionar dos de las tres mediatrices (por ejemplo, las de **AB** y





- BC**). Renombrar el punto de intersección como **O**; este es el circuncentro del triángulo.
4. Verificar visualmente que la tercera mediatriz, la del lado **CA**, también pasa exactamente por **O**. Esta concurrencia de las tres mediatrices es una propiedad notable que se cumple en cualquier triángulo.
 5. Con la herramienta **Circunferencia (centro, punto)** trazar la circunferencia circunscrita, haciendo clic primero en **O** (centro) y luego en **A** (punto de paso). Observar que la circunferencia trazada pasa exactamente por los otros dos vértices, **B** y **C**, sin haber sido construida explícitamente para ello.
 6. Con la herramienta **Distancia o Longitud** verificar la equidistancia midiendo sucesivamente las distancias $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$. Verificar en la vista algebraica que los tres valores son iguales: $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$. Esa distancia común es el radio (**r**) de la circunferencia circunscrita.
 7. Con la herramienta **Mueve** arrastrar el vértice **C** por la vista gráfica, deformando el triángulo. Observar la posición del circuncentro **O** en cada caso y registrar los hallazgos en la tabla (Figura 5.2).

Tabla 5.2. Ubicación del circuncentro en función del tipo de triángulo.

Tipo de triángulo	Posición del circuncentro O
Acutángulo (todos los ángulos $< 90^\circ$)	
Rectángulo (un ángulo $= 90^\circ$)	
Obtusángulo ($90^\circ < \text{un ángulo} < 180^\circ$)	

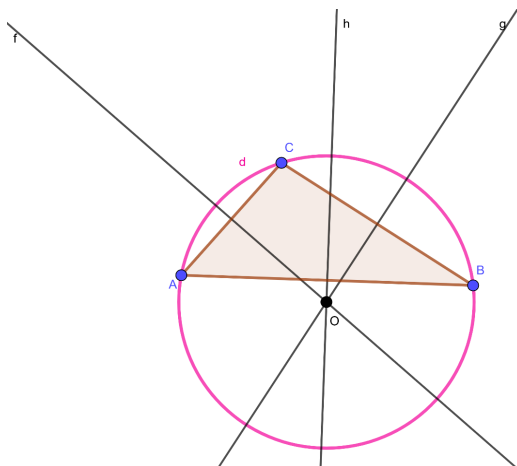


Figura 5.12. Triángulo ABC con sus tres mediatrices concurrentes en el circuncentro O.

Preguntas para la reflexión:

- a) Observación:** Complete la tabla del paso 7 y formule en sus propias palabras la regla que relaciona el tipo de triángulo (acutángulo, rectángulo u obtusángulo) con la posición del circuncentro (interior, sobre un lado o exterior).
- b) Comprensión:** Argumente por qué el circuncentro equidista necesariamente está en los tres vértices del triángulo. (Sugerencia: piense en lo que cumple un punto que está sobre la mediatriz de **AB** y, a la vez, sobre la mediatriz de **BC**).
- c) Caso triángulo rectángulo:** En un triángulo rectángulo, el circuncentro coincide con el punto medio de la hipotenusa, lo que implica que la hipotenusa es un diámetro de la circunferencia circunscrita. ¿Qué consecuencia tiene esto para el ángulo opuesto a la hipotenusa, considerándolo como un ángulo inscrito en una semicircunferencia?
- d) Conjetura:** La circunferencia construida pasa por los tres vértices del triángulo y por eso se llama circunferencia circunscrita. ¿Existirá siempre, para cualquier triángulo, una única circunferencia que



pase por sus tres vértices? Justifique su respuesta a partir de lo observado en la construcción.

- **Actividad con GeoGebra 3: Las bisectrices e incentro.**

Objetivo: Identificar el incentro como punto de intersección de las bisectrices y como centro de la circunferencia inscrita.

Idea didáctica: Articular la propiedad de equidistancia trabajada en la Actividad 4 (cada bisectriz es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los lados de un ángulo) con una nueva consecuencia: el punto donde se intersecan dos bisectrices equidista simultáneamente de los tres lados del triángulo. Aunque el triángulo se deforme, el incentro permanece siempre dentro y conserva esa propiedad.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Polígono** trazar el triángulo **ABC**.
2. Con la herramienta **Bisectriz** trazar la bisectriz del ángulo **A**, la bisectriz del ángulo **B** y la bisectriz del ángulo **C**. Para trazar la bisectriz, por ejemplo, del ángulo **A**, recuerda hacer clic sucesivamente en **B**, **A** y **C** (con el vértice del ángulo en el medio).
3. Con la herramienta **Intersección**, seleccionar dos de las tres bisectrices. Renombrar el punto de intersección como **I**; este es el incentro del triángulo.
4. Verificar visualmente que la tercera bisectriz también pasa exactamente por **I**. Esta concurrencia de las tres bisectrices es una propiedad notable que se cumple en cualquier triángulo.
5. Con la herramienta **Recta perpendicular**, trazar una perpendicular desde **I** a cada uno de los tres lados del triángulo.



6. Con la herramienta **Intersección**, marcar los puntos donde cada perpendicular interseca al lado correspondiente. Renómbrelos como:

T_1 = pie de la perpendicular sobre el lado $\overline{BC}$.

T_2 = pie de la perpendicular sobre el lado $\overline{CA}$.

T_3 = pie de la perpendicular sobre el lado $\overline{AB}$.

7. Con la herramienta **Distancia o Longitud**, medir sucesivamente las distancias $\overline{IT_1}$, $\overline{IT_2}$ e $\overline{IT_3}$. Verificar en la vista algebraica que los tres valores son iguales. Esa distancia común es el radio de la circunferencia inscrita.

8. Con la herramienta **Circunferencia (centro, punto)**, hacer clic primero en **I** y luego en cualquiera de los puntos T_1 , T_2 o T_3 .

9. Observar que la circunferencia trazada toca los tres lados del triángulo, cada uno en un único punto (los puntos T_1 , T_2 y T_3). Esta es la circunferencia inscrita.

10. Con la herramienta **Mueve** arrastrar los vértices **A**, **B** o **C**, deformando libremente el triángulo, formar triángulos muy alargados, casi degenerados, acutángulos, rectángulos y obtusángulos.

11. Observar en cada caso (Figura 5.13):

- ¿El incentro permanece dentro del triángulo en todos los casos?
- ¿Las tres distancias $\overline{IT_1}$, $\overline{IT_2}$ e $\overline{IT_3}$ siguen siendo iguales entre sí?
- ¿La circunferencia inscrita sigue siendo tangente a los tres lados?



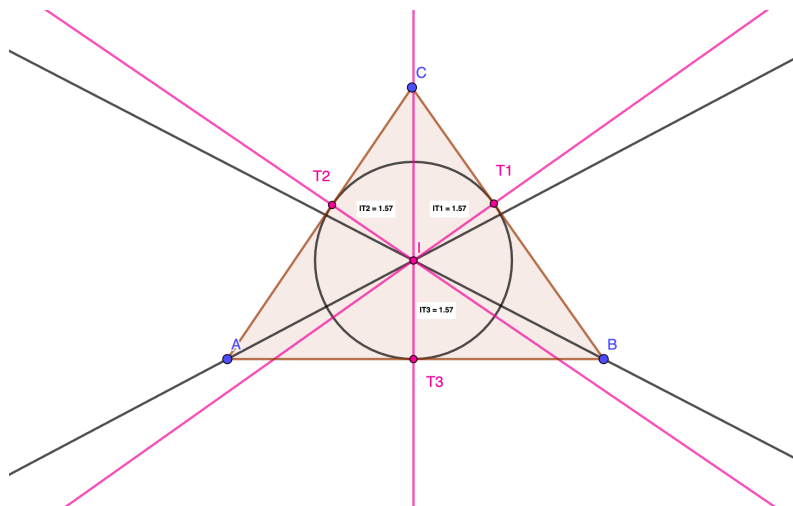


Figura 5.13. Triángulo ABC con sus tres bisectrices concurrentes en el incentro I y la circunferencia inscrita.

Preguntas para la reflexión:

- a) **Observación:** A diferencia del circuncentro (Actividad 6), que puede quedar dentro, sobre un lado o fuera del triángulo, ¿qué se observa con el incentro al deformar libremente el triángulo? ¿Por qué crees que ocurre así? (Sugerencia: piense por dónde pasa cada bisectriz interior).
- b) **Comprensión:** En la Actividad 4 se demostró que cada punto sobre la bisectriz de un ángulo equidista de los lados de ese ángulo. Apoyándose en esa propiedad, argumente por qué el incentro, que está sobre las tres bisectrices, equidista necesariamente de los tres lados del triángulo.
- c) **Conjetura:** La circunferencia inscrita toca los tres lados, pero no los cruza. Si quisiéramos trazar una circunferencia con centro en I pero un radio mayor que IT_1 , ¿qué ocurriría? ¿Y si fuera menor? Explique por qué el radio elegido es el único que produce una circunferencia tangente a los tres lados simultáneamente.
- d) **Caso del equilátero:** Construya un triángulo equilátero (puede retomar la configuración de la Actividad



3, con $\alpha = 60^\circ$) y compare la posición del incentro con la del circuncentro (Actividad 6). ¿Qué sucede con esos puntos? ¿Por qué este fenómeno solo ocurre en el equilátero y no en otros triángulos?

• **Actividad con GeoGebra 4: Las alturas y ortocentro.**

Objetivo: Identificar las alturas de un triángulo y verificar la posición del ortocentro según el tipo de triángulo.

Idea didáctica: Generar un conflicto visual con el caso obtusángulo, donde algunas alturas parecen salirse del triángulo. Esa aparente anomalía permite entender que la altura no depende de estar dentro de la figura, sino de formar un ángulo recto con el lado opuesto o con su prolongación.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Polígono** trazar el triángulo ABC.
2. Con la herramienta **Recta**, trazar la recta que pasa por **A** y **B**, la que pasa por **B** y **C**, y la que pasa por **C** y **A**. De este modo, los lados del triángulo quedan prolongados infinitamente en ambas direcciones.
3. Con la herramienta **Recta perpendicular**, construir las tres alturas:
 - Hacer clic en el vértice **A** y luego en la recta que contiene el lado $\overline{BC}$.
 - Hacer clic en el vértice **B** y luego en la recta que contiene el lado $\overline{CA}$.
 - Hacer clic en el vértice **C** y luego en la recta que contiene el lado $\overline{AB}$.

Nota: En los triángulos obtusángulos, dos de las alturas intersecan a las prolongaciones de los lados correspondientes y no a los segmentos que los constituyen. Esto es geoméricamente correcto, ya que la altura es perpendicular a la recta que contiene el lado, no necesariamente al segmento.





4. Con la herramienta **Intersección**, seleccionar dos de las tres alturas. Renombre el punto de intersección como **H**; este es el ortocentro del triángulo. Verifique visualmente que la tercera altura también pasa exactamente por **H**. Esta concurrencia de las tres alturas es una propiedad notable que se cumple en cualquier triángulo.
5. Exploración de los casos según el tipo de triángulo: Con la herramienta **Mueve** arrastrar uno de los vértices, deformando el triángulo. Observar la posición del ortocentro **H** en cada caso y registre los hallazgos en la tabla 5.3 (Figura 5.14).

Tabla 5.3. Ubicación del ortocentro (H) en función del tipo de triángulo.

Tipo de triángulo	Posición del ortocentro H
Acutángulo (todos los ángulos $< 90^\circ$)	
Rectángulo (un ángulo $= 90^\circ$)	
Obtusángulo ($90^\circ < \text{un ángulo} < 180^\circ$)	

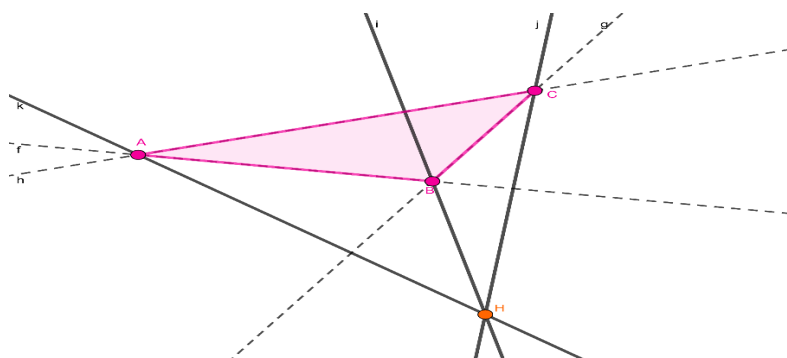


Figura 5.14. Triángulo ABC con sus tres alturas concurrentes en el ortocentro H.

Preguntas para la reflexión:

- a) Observación:** Complete la tabla del paso 5 y formule en sus propias palabras la regla que relaciona el tipo de triángulo (acutángulo, rectángulo u obtusángulo) con la posición del ortocentro (interior, sobre un vértice o exterior).

b) Comprensión: En el caso obtusángulo, dos de las alturas intersecan a las prolongaciones de los lados y no a los lados mismos. ¿Por qué esto no contradice la definición de altura? ¿Qué papel juega la palabra prolongación en la definición correcta?

c) Caso triángulo rectángulo: Explique con sus propias palabras por qué, en un triángulo rectángulo, el ortocentro coincide necesariamente con el vértice del ángulo recto. (Sugerencia: piense qué relación tienen los dos catetos entre sí).

d) Conjetura: Construya o retome un triángulo equilátero (puede usar la configuración de la Actividad 3, con $\alpha = 60^\circ$). Localice en él los cuatro puntos notables estudiados: baricentro **G** (Actividad 5), circuncentro **O** (Actividad 6), incentro **I** (Actividad 7) y ortocentro **H**. ¿Qué observa? ¿Por qué cree que este fenómeno solo ocurre en el equilátero?

e) Exploración complementaria (la recta de Euler): En un triángulo cualquiera (no equilátero), construya simultáneamente el baricentro **G**, el circuncentro **O** y el ortocentro **H**. Trace la recta que pasa por dos de ellos. ¿Pasa también por el tercero? Esta alineación de los tres puntos define la recta de Euler, uno de los resultados más bellos de la geometría del triángulo.

Síntesis del apartado

El recorrido por medianas, mediatrices, bisectrices y alturas revela tres ideas de orden superior: la concurrencia común a las cuatro familias, la caracterización de cada punto por una propiedad de equidistancia o proporcionalidad (lugar geométrico), y la conexión entre la clasificación angular del triángulo y la posición de los puntos notables. La síntesis final muestra dos resultados elegantes: en el equilátero los cuatro puntos coinciden por simetría máxima, y en cualquier otro triángulo baricentro, circuncentro y ortocentro se alinean sobre la recta de Euler.





El recorrido propuesto en este capítulo ha situado al triángulo en el lugar conceptual que le corresponde dentro de la geometría escolar. Lejos de presentarse como una figura cerrada que se reconoce o se nombra, el triángulo se muestra aquí como sistema de relaciones cuya comprensión requiere articular tres movimientos didácticos sucesivos. El primero, abordado en la sección 5.1, consistió en establecer las relaciones básicas que estructuran el espacio. Las rectas y los ángulos no fueron tratados como objetos aislados, sino como configuraciones cuyas propiedades de paralelismo, perpendicularidad y medida angular constituyen el lenguaje primario a partir del cual cualquier figura más compleja se vuelve inteligible. Sin esta base, los conceptos posteriores quedan suspendidos sobre intuiciones perceptivas que el aprendizaje sistemático debe poder convertir en conocimiento estructurado.

El segundo movimiento, desarrollado en la sección 5.2, condujo del reconocimiento visual a la clasificación inclusiva. Se mostró que clasificar un triángulo no se reduce a identificar una apariencia, sino que supone reconocer relaciones entre propiedades y entender cómo una figura particular puede ser, al mismo tiempo, un caso especial de otra figura más general. La clasificación inclusiva del equilátero como caso particular del isósceles, la consolidación del invariante de la suma de los ángulos internos y el análisis de la desigualdad triangular como condición de existencia constituyen aprendizajes que reorganizan la mirada del estudiante sobre las figuras planas. No son contenidos aislados, sino expresiones de un mismo modo de pensar la geometría como sistema de relaciones.

El tercer movimiento, propio de la sección 5.3, condujo al estudiante hacia el interior del triángulo a través de los puntos notables. Mediatrices, bisectrices, medianas y alturas se introdujeron como una nomenclatura técnica que debe memorizarse, sino como construcciones geométricas que revelan propiedades de equidistancia, concurrencia y proporción. El reconocimiento del

circuncentro, el incentro, el baricentro y el ortocentro, así como la alineación de tres de ellos en la recta de Euler, mostró que el triángulo contiene una estructura interna rica que se vuelve visible solo cuando se construye con intencionalidad geométrica. GeoGebra ha sido, en este tramo, particularmente productivo, porque permite que la concurrencia se observe y se ponga a prueba mediante el arrastre, en lugar de ser asumida como un dato.

A lo largo de todo el capítulo, el papel de la mediación didáctica ha sido determinante. La construcción condicionada, la prueba del arrastre, la formulación de conjeturas y la verificación dinámica de invariantes han funcionado como dispositivos para que el estudiante transite desde la observación hacia la justificación. El triángulo deja de ser una imagen que se reconoce y pasa a ser una estructura cuyas relaciones se comprenden, se conjeturan y se argumentan. Este desplazamiento conceptual, que es propio del razonamiento geométrico maduro, sienta las bases para el capítulo siguiente, en el que la mirada se desplazará desde la estructura interna de una figura hacia las relaciones entre figuras, abriendo el estudio de la congruencia, la semejanza y la proporcionalidad como prolongaciones naturales del trabajo aquí iniciado.

Preguntas para la reflexión docente

Sobre las concepciones previas y los obstáculos:

1. ¿Qué representaciones previas del triángulo traen sus estudiantes al aula y cuáles de ellas pueden constituir obstáculos cuando se introduce la clasificación inclusiva o el análisis de propiedades? ¿De qué manera la prevalencia del prototipo perceptivo, esto es, la imagen única que el estudiante asocia con la palabra «triángulo», condiciona el reconocimiento de configuraciones menos habituales como los triángulos obtusángulos o muy alargados?





2. ¿Cómo identificar, en las producciones de los estudiantes, la diferencia entre quien dibuja un triángulo y quien construye un triángulo? ¿Qué pistas permiten distinguir un aprendizaje sostenido en la percepción visual de uno sostenido en las propiedades geométricas?

Sobre la clasificación de las figuras:

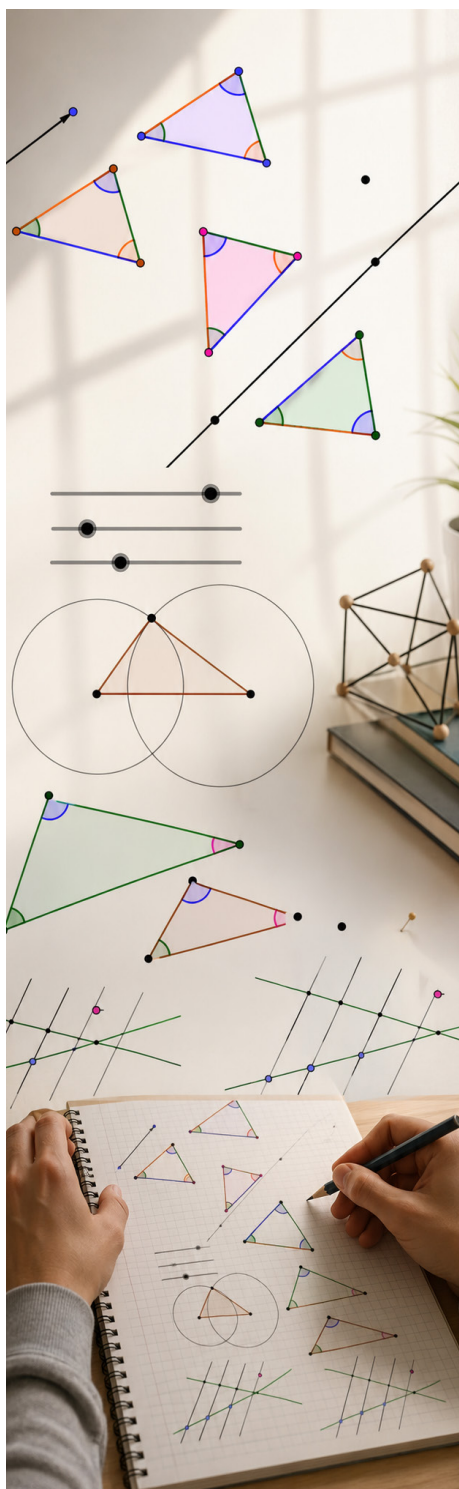
1. ¿Cómo plantea usted habitualmente la clasificación de los triángulos en su aula y cuánto de esa clasificación se apoya en categorías compartimentadas frente a una mirada inclusiva? Si descubriera que sus estudiantes consideran que un triángulo equilátero no es isósceles, ¿qué situación didáctica diseñaría para producir el conflicto cognitivo que reorganice esa concepción?
2. ¿Qué importancia atribuye a la formulación de definiciones cuando enseña geometría y en qué momento del trabajo escolar considera oportuno discutir con sus estudiantes que una misma figura puede admitir definiciones equivalentes, pero no idénticas?

Sobre los puntos notables y la construcción geométrica:

1. ¿De qué modo introduce usted los puntos notables del triángulo y qué lugar ocupa, en esa introducción, la construcción geométrica frente a la simple nomenclatura? ¿Considera que sus estudiantes alcanzan a comprender la concurrencia como una propiedad que se demuestra, o más bien como un hecho que se acepta porque así aparece en la figura?
2. ¿Qué oportunidades didácticas ofrecen la mediatriz, la bisectriz, la mediana y la altura para trabajar con sus estudiantes el concepto de lugar geométrico, esto es, el conjunto de puntos que cumplen una propiedad común? ¿Cómo aprovecha estos contenidos para mostrar que la geometría no se limita a nombrar figuras, sino que estudia relaciones de equidistancia, simetría y proporción?

Sobre la mediación didáctica y el uso de GeoGebra:

1. ¿En qué momentos del trabajo con triángulos resulta verdaderamente fértil el uso de GeoGebra y en qué momentos podría reemplazarse sin pérdida por construcciones con regla y compás? ¿Qué criterios utiliza para decidir entre un entorno y otro?
2. ¿Cómo orienta usted a sus estudiantes para que pasen del arrastre como exploración perceptiva al arrastre como dispositivo argumentativo? ¿Qué preguntas formula durante esa transición y qué evidencias considera suficientes para validar una conjetura ante el grupo?
3. ¿De qué manera articula, en la planificación de una clase, el tiempo dedicado a la construcción técnica con GeoGebra con el tiempo dedicado a la discusión matemática sobre lo construido? ¿Cuál de los dos tiempos suele acortarse cuando el horario aprieta y qué efectos didácticos tiene esa decisión?



06.

Medida y proporcionalidad: congruencia, semejanza y el Teorema de Tales

6.1. Congruencia: la invariancia bajo movimiento

La transición desde la geometría de las figuras hacia la geometría de las relaciones métricas constituye uno de los pasos más exigentes de la escolaridad. Una vez que el estudiante ha consolidado, en el capítulo anterior, la idea del triángulo como sistema de relaciones internas, este capítulo lo conduce hacia un nivel adicional, en el que las figuras dejan de pensarse de manera aislada y comienzan a estudiarse en relación con otras figuras. Aparecen entonces tres preguntas conceptualmente nuevas. ¿Qué se conserva cuando una figura se mueve sin deformarse? ¿Qué propiedades se conservan cuando una figura se amplía

o se reduce? ¿Qué estructura geométrica explica la proporcionalidad entre segmentos generada por el paralelismo?

La investigación didáctica ha mostrado que estos contenidos están marcados por obstáculos persistentes. Los estudiantes confunden la congruencia con una igualdad de apariencia, tratan la semejanza como una mera relación visual de parecido y mecanizan la aplicación del teorema de Tales sin comprender la estructura de proporcionalidad que lo sustenta (Hart, 1981; Lamon, 2007). A esto se añade una dificultad de fondo. El pensamiento proporcional no es una extensión natural del pensamiento aditivo, y muchos estudiantes lo abordan desde estrategias aditivas inadecuadas (Lesh et al., 1988). GeoGebra resulta particularmente fértil en este territorio, porque permite construir configuraciones en las que la proporcionalidad puede observarse y validarse en tiempo real. La función de arrastre hace posible variar las magnitudes mientras las razones permanecen constantes, lo que muestra que la proporcionalidad no es un dato impuesto desde fuera, sino una propiedad estructural de la configuración (Laborde, 2000).

Las actividades del capítulo abordan la congruencia como invariancia bajo movimiento, la semejanza como conservación de forma bajo cambio de escala, y el teorema de Tales como expresión geométrica de la proporcionalidad. El recorrido se organiza en tres subsecciones que avanzan desde una invariancia hacia otra, y que conducen al estudiante a desplazar la atención desde la apariencia hacia la propiedad, y desde la propiedad hacia la justificación.

La noción de congruencia constituye el primer concepto métrico que el estudiante encuentra cuando comienza a establecer relaciones entre figuras y aprenderlo bien no es trivial. Investigaciones consistentes en didáctica de la geometría han mostrado que muchos estudiantes asocian la congruencia con la igualdad de apariencia





visual, lo que les impide reconocer como congruentes dos figuras presentadas en posiciones u orientaciones distintas. Esta concepción perceptiva, aunque comprensible en una primera aproximación, debe reorganizarse hacia una comprensión más precisa, en la que la congruencia se entiende como una relación que se sostiene en la conservación de longitudes y ángulos bajo los movimientos rígidos del plano.

El paso conceptual implica abandonar la idea de que dos figuras son iguales porque se ven iguales y aceptar que la congruencia se define por la existencia de un movimiento del plano, esto es, una traslación, una rotación o una reflexión, que aplica una figura sobre la otra preservando todas sus medidas. GeoGebra ofrece un entorno particularmente productivo para esta transición conceptual. La función de arrastre permite verificar que las medidas se conservan no en un caso particular, sino en una familia completa de configuraciones, lo que aproxima al estudiante a una comprensión estructural de la propiedad.

La actividad que sigue propone construir un triángulo, transformarlo por traslación y rotación, y comprobar que las medidas se conservan en cada paso. El estudiante observa, mide y conjetura. El docente acompaña la transición desde una mirada perceptiva hacia una mirada relacional, abriendo la posibilidad de discutir, posteriormente, los criterios de congruencia que la geometría sintetiza en proposiciones más generales.

- **Actividad con GeoGebra 1: Congruencia como invariancia bajo movimiento.**

Objetivo: Verificar que la congruencia conserva longitudes y ángulos bajo movimientos rígidos del plano.

Idea didáctica: Superar la concepción de la congruencia como “igualdad visual” y mostrar que se trata de una relación que se sostiene en la conservación de longitudes y ángulos bajo movimientos del plano.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Polígono**, construir un triángulo **ABC** ubicando los puntos **A**, **B** y **C** en la vista gráfica.
2. Con la herramienta **Vector**, trazar un vector libre con origen y extremo en dos puntos cualesquiera del plano.
3. Seleccionar la herramienta **Traslación**, hacer clic sobre el triángulo **ABC** y luego sobre el vector. GeoGebra generará un triángulo trasladado **A'B'C'**.
4. Con la herramienta **Punto** ubicar un punto **O** en la vista gráfica (será el centro de rotación).
5. Seleccionar la herramienta **Rotación**, hacer clic sobre el triángulo **A'B'C'**, luego sobre el punto **O**, y escribir un ángulo arbitrario (por ejemplo, 60°). Se obtendrá un nuevo triángulo **A''B''C''**.
6. Con la herramienta **Recta**, trazar una recta arbitraria en la vista gráfica determinada por dos puntos **F** y **G**, ubicados en una zona del plano distinta de las ya ocupadas por las construcciones previas.
7. Seleccionar la herramienta **Simetría axial** (reflexión), hacer clic sobre el triángulo **A''B''C''** y luego sobre la recta. GeoGebra generará un cuarto triángulo, **A'''B'''C'''**, que es la reflexión del anterior respecto de esa recta. Observar que la orientación del triángulo se invierte, propiedad distintiva de la reflexión frente a la traslación y la rotación.
8. Con la herramienta Distancia o Longitud, medir los lados de los cuatro triángulos:
 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}; \overline{A'B'}, \overline{B'C'}, \overline{C'A'}; \overline{A''B''}, \overline{B''C''}, \overline{C''A''}; \overline{A'''B'''}, \overline{B'''C'''}, \overline{C'''A'''}$
9. Con la herramienta **Ángulo**, medir los tres ángulos interiores de cada uno de los cuatro triángulos.
10. Verificar en la vista algebraica que los lados y ángulos correspondientes son numéricamente iguales en los cuatro triángulos.



11. Con la herramienta **Mueve**, arrastrar los vértices **A**, **B** o **C** del triángulo original. Observar cómo los cuatro triángulos transformados se modifican en sincronía, conservando siempre las mismas medidas que el original (Figura 6.1).

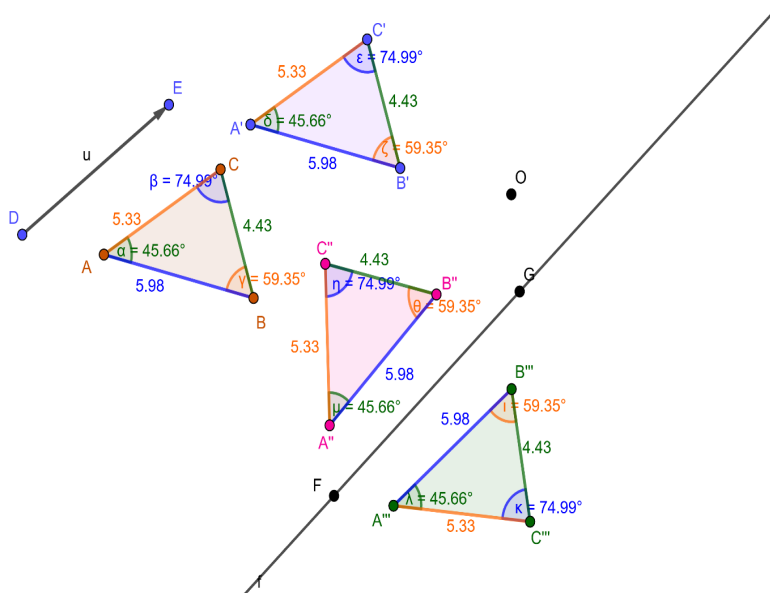


Figura 6.1. Triángulos congruentes obtenidos por traslación, rotación y reflexión sucesivas del triángulo original ABC.

Preguntas para la reflexión:

- a) Observación:** Al mover los vértices del triángulo original, ¿qué ocurre con las medidas de los triángulos transformados? ¿Qué propiedades se mantienen invariantes pese al movimiento? ¿En qué se diferencia el triángulo reflejado de los obtenidos por traslación y rotación?
- b) Comprensión:** ¿Qué significa que dos figuras sean congruentes? ¿Basta con que se vean iguales, o se requiere algo más? Formule en sus propias palabras una definición de congruencia que prescinda de la apariencia visual.
- c) Conjetura:** ¿Podría afirmarse que dos triángulos son congruentes si solo se conocen las medidas de sus

tres lados, sin información sobre los ángulos? ¿Y si solo se conocen sus tres ángulos? Justifique a partir de lo observado.

- **Actividad con GeoGebra 2: Los criterios de congruencia: condiciones que determinan un triángulo**

Objetivo: Determinar qué condiciones sobre lados y ángulos son suficientes para garantizar la congruencia de dos triángulos.

Idea didáctica: Poner a prueba la conjetura formulada al final de la Actividad 1. El estudiante construye triángulos a partir de distintos conjuntos de datos y observa cuáles producen un triángulo único y cuáles admiten múltiples configuraciones. La actividad muestra que tres lados determinan un único triángulo, mientras que tres ángulos producen una familia de triángulos con la misma forma, pero distinto tamaño, lo que abre conceptualmente el apartado siguiente.

Construcción sugerida en GeoGebra:

- Parte 1. El criterio LLL: tres lados determinan el triángulo
- 1. Con la herramienta **Deslizador**, crear tres deslizadores tipo Número llamados **a**, **b**, **c**, con valores entre 1 y 10 e incremento 0.1. Estos representarán las longitudes de los tres lados del triángulo.
- 2. Con la herramienta **Punto**, hacer clic en la vista gráfica. Automáticamente se llamará **A** o **P**. Si no se llama P, dale clic derecho, elige Renombrar y escribe P.
- 3. En la Barra de **Entrada**, escribir **$Q = P + (a, 0)$** . Esto creará el punto **Q** a la derecha de **P**, exactamente a una distancia igual a lo que marque el deslizador a.
- 4. Con la herramienta **Segmento**, hacer clic primero en **P** y luego en **Q**. Este será el primer lado del triángulo (su longitud estará amarrada al deslizador a).





5. Con la herramienta **Circunferencia**: centro y radio, hacer clic sobre el punto **P**, y en la ventana emergente escribir la letra **b** como valor del radio.
6. Con la misma herramienta **Circunferencia**: centro y radio, hacer clic sobre el punto **Q**, y en la ventana emergente escribir la letra **c** como valor del radio.
7. Con la herramienta **Intersección**, hacer clic justo en el cruce superior donde se intersecan las dos circunferencias. Si el punto nuevo no se llama **R**, darle clic derecho, elegir **Renombrar** y escribir **R**.
8. Con la herramienta **Polígono**, construir el triángulo haciendo clic en los puntos en orden: primero en **P**, luego en **Q**, luego en **R**, y cerrar haciendo clic nuevamente en **P**.
9. En la **Vista Algebraica** (barra de la izquierda), hacer clic en los círculos de color junto a las ecuaciones de las circunferencias para ocultarlas de la vista gráfica.
10. Con la herramienta **Mueve**, variar los deslizadores **a**, **b** y **c**. Observar cómo el triángulo se deforma dinámicamente según los valores y cómo desaparece si no se cumple la desigualdad triangular (Figura 6.2a).

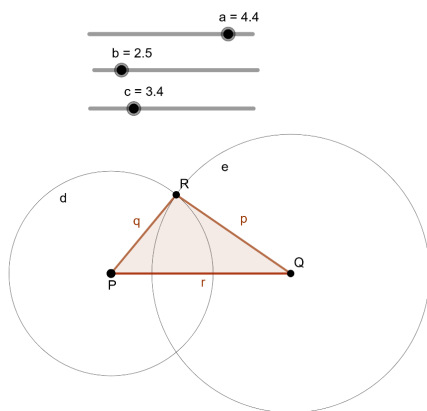


Figura 6.2a. Construcción dinámica de un triángulo mediante el criterio LLL a partir de a , b y c (Parte 1).

- Parte 2. El caso A: tres ángulos no determinan el triángulo
1. Con la herramienta **Deslizador**, crear dos deslizadores tipo Ángulo llamados **a** y **b**, con valores entre 10° y 160° .
 2. Con la herramienta **Deslizador**, crear un deslizador tipo Número llamado **L**, con valores entre 1 y 15 e incremento 0.1. Este controlará la longitud de la base.
 3. En la Barra de **Entrada**, definir el tercer ángulo escribiendo exactamente: **$c = 180^\circ - a - b$** . Este valor representará el tercer ángulo, que queda determinado automáticamente por los otros dos.
 4. Con la herramienta **Punto**, hacer un clic en una zona libre de la vista gráfica y renombrarlo **S**.
 5. En la Barra de **Entrada**, escribir **$T = S + (L, 0)$** para obtener el punto **T** a distancia **L** de **S** sobre la dirección horizontal.
 6. Con la herramienta **Ángulo** amplitud dada, hacer clic primero en el punto **T**, luego en **S** con amplitud **a** y marcar obligatoriamente **Sentido antihorario**. GeoGebra generará el punto auxiliar **T'**.
 7. Con la misma herramienta **Ángulo** amplitud dada, hacer clic primero en el punto **S**, luego **T** con amplitud **b** y marcar obligatoriamente **Sentido horario**. GeoGebra generará el punto auxiliar **S'**.
 8. Con la herramienta **Recta**, trazar la recta que pasa por los puntos **S** y **T'**, y la recta que pasa por los puntos **T** y **S'**.
 9. Con la herramienta **Intersección**, hacer clic donde se intersecan ambas rectas y, renombrar el punto nuevo como **U**.
 10. Con la herramienta **Polígono**, construir el triángulo haciendo clic en los puntos en el siguiente orden: primero en **S**, luego en **T**, luego en **U**, y cerrar haciendo clic nuevamente en **S**.



11. Con la herramienta **Mueve**, variar el deslizador **L** manteniendo los ángulos **a** y **b** fijos para observar la semejanza (variación de tamaño sin alterar la forma), o variar los deslizadores de los ángulos para transformar el polígono de manera dinámica (Figura 6.2b).

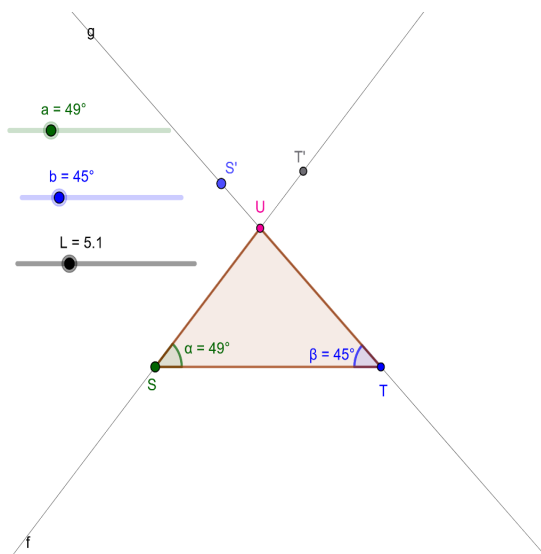


Figura 6.2b. Familia de triángulos generada a partir de los ángulos α , β y γ , con tamaño parametrizado por L (Parte 2).

Preguntas para la reflexión:

- a) Observación:** En la Parte 1, al variar los deslizadores a, b y c, ¿cuántos triángulos distintos se obtienen para cada combinación particular de valores? En la Parte 2, al variar únicamente el deslizador L manteniendo α y β fijos, ¿qué cambia y qué permanece constante en la familia de triángulos resultantes?
- b) Comprensión:** Conocer las tres longitudes de los lados de un triángulo basta para determinarlo de manera única, salvo reflexión. ¿Por qué conocer únicamente los tres ángulos no produce el mismo resultado? Formule una explicación a partir de lo que la construcción permite observar acerca del papel de los ángulos y del papel de las longitudes.



c) Conjetura: A partir de lo trabajado, formule una afirmación sobre qué información mínima determina la congruencia entre dos triángulos. Si dos triángulos tienen los mismos tres ángulos, pero distintos tamaños, ¿qué relación tienen entre sí? Esta relación, distinta de la congruencia, se llama semejanza y será objeto de estudio en el apartado siguiente.

Síntesis del apartado

El apartado ha situado la congruencia como la primera relación métrica entre figuras geométricas, distinguiéndola con claridad de la igualdad de apariencia visual. La primera actividad mostró que dos figuras son congruentes cuando una puede obtenerse de la otra mediante un movimiento rígido del plano, ya sea una traslación, una rotación o una reflexión, y que las medidas se conservan independientemente de la posición o la orientación. La segunda actividad puso a prueba qué información sobre lados y ángulos resulta suficiente para garantizar la congruencia, mostrando que tres lados (LLL) determinan un triángulo único, mientras que tres ángulos (AAA) producen una familia de triángulos con la misma forma, pero distinto tamaño. Esta asimetría entre lo que conserva la congruencia y lo que conserva la forma motiva la entrada al apartado siguiente, donde el invariante deja de ser la conservación de longitudes y pasa a ser la conservación de razones entre longitudes correspondientes.

6.2. Semejanza: la conservación de la forma bajo cambio de escala

La semejanza es la relación entre figuras que conservan su forma sin necesariamente conservar su tamaño. Donde la congruencia exigía que dos figuras tuvieran las mismas medidas, la semejanza solo exige que tengan las mismas proporciones. Esta diferencia, en apariencia técnica, supone un cambio cognitivo importante. El estudiante debe aprender a mirar las figuras desde una clave nueva, en la que lo





determinante no son las longitudes absolutas sino las razones que ellas mantienen entre sí.

La conjetura abierta al final del apartado anterior, según la cual tres ángulos no determinan la congruencia de un triángulo, encuentra aquí su resolución. Conocer los tres ángulos de un triángulo determina su forma, pero no su tamaño. Dos triángulos con los mismos ángulos son semejantes, pero no necesariamente congruentes. Esta observación, lejos de ser un dato técnico, encierra el corazón conceptual de la semejanza, esto es, la idea de que la forma de una figura es una propiedad invariante bajo cambios de escala, mientras que el tamaño es una propiedad variable que se controla mediante una razón.

Las dos actividades de este apartado abordan la semejanza desde dos ángulos complementarios. La primera introduce la noción a través de la homotecia, que es la forma más directa de generar figuras semejantes a partir de una figura dada, y permite verificar dinámicamente la conservación de la razón entre lados correspondientes. Conviene precisar que la homotecia es un caso particular de semejanza, con centro fijo y sin rotación. Existen otras configuraciones de figuras semejantes (obtenidas por reflexión, por ejemplo) que no derivan de una homotecia simple, aunque sus propiedades métricas son las mismas, la distinción no afecta a las propiedades que se trabajan en las actividades siguientes. La segunda actividad explora una propiedad estructural menos intuitiva, esto es, la relación entre la razón de semejanza y la razón de áreas, mostrando que cuando los lados cambian de longitud por un factor k , las áreas lo hacen por un factor k^2 . Esta regla del cuadrado, que sorprende a muchos estudiantes y a no pocos adultos, abre el camino hacia generalizaciones tridimensionales y prepara la entrada al teorema de Tales del apartado siguiente.

- **Actividad con GeoGebra 1: Semejanza: conservar la forma cambiando la escala.**

Objetivo: Identificar la semejanza como conservación de la forma bajo cambio de escala.

Idea didáctica: Mostrar que la semejanza no es una cuestión de parecido visual, sino una relación matemática precisa basada en una razón constante entre los lados correspondientes. La homotecia se utiliza como caso particular de semejanza, sencillo de construir, sin pretender agotar todos los modos de generar figuras semejantes.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Polígono** construir un **triángulo ABC**.
2. Con la herramienta **Deslizador**, crear un deslizador tipo **Número** llamado **k**, con valores entre **0,5** y **3** e incremento **0,1**. Este deslizador representará la razón de homotecia.
3. Con la herramienta **Punto** ubicar un punto **O** en la vista gráfica, exterior al triángulo (será el centro de homotecia).
4. Con la herramienta **Homotecia**, hacer clic sobre el triángulo **ABC**, luego sobre el punto **O**, y escriba **k** como factor de escala. Se obtendrá un nuevo **triángulo A'B'C'**.

Nota: La homotecia es un caso particular de semejanza con centro fijo y sin rotación. Existen otras configuraciones de figuras semejantes (por ejemplo, mediante reflexión) que no se obtienen por homotecia simple, pero cuyas propiedades métricas son las mismas.

5. Con la herramienta **Distancia o Longitud**, medir los lados correspondientes de ambos triángulos: $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$, $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$, $\overline{CA}$ y $\overline{C'A'}$.

6. Con la herramienta **Ángulo**, medir los tres ángulos interiores de cada triángulo.
7. Calcular las razones, para ellos en la **Barra de Entrada**, definir las tres razones entre lados correspondientes:
 - $r1 = \text{Distancia}(A', B') / \text{Distancia}(A, B)$
 - $r2 = \text{Distancia}(B', C') / \text{Distancia}(B, C)$
 - $r3 = \text{Distancia}(C', A') / \text{Distancia}(C, A)$
8. Verificar en la vista algebraica que los tres valores coinciden y son iguales al valor del deslizador **k**
9. Mover el deslizador **k** y observar cómo el triángulo **A'B'C'** crece o se reduce. Verifique que los ángulos permanecen invariantes y que las tres razones siguen siendo iguales entre sí.
10. Con la herramienta **Mueve**, arrastrar los vértices **A**, **B** y **C** del triángulo original. Observe que la propiedad de semejanza se mantiene cualquiera sea la forma del triángulo (Figura 6.3).

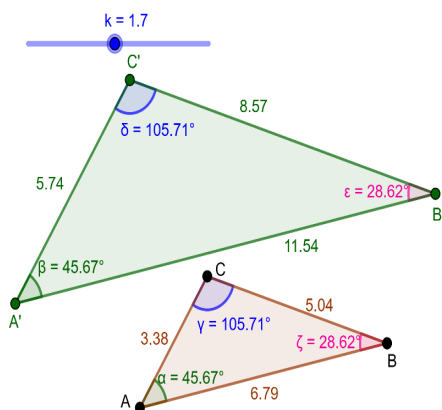


Figura 6.3. Triángulos semejantes obtenidos por homotecia con razón k y centro O .



Preguntas para la reflexión:

- a) **Observación:** Al mover el deslizador k , las longitudes cambian. ¿Qué ocurre con las razones entre lados correspondientes? ¿Y con los ángulos?
- b) **Comprensión:** La semejanza exige dos condiciones simultáneas, esto es, la igualdad de ángulos y la proporcionalidad de lados. ¿Es posible que se cumpla una sin la otra? Trate de imaginar (o construir) una figura que tenga lados proporcionales, pero ángulos distintos, o ángulos iguales, pero lados no proporcionales.
- c) **Conjetura:** Si dos triángulos tienen sus tres ángulos iguales, ¿podemos asegurar que son semejantes? ¿Y si solo tienen dos ángulos iguales? (Sugerencia: recordar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es siempre 180°).
- **Actividad con GeoGebra 2: La razón de semejanza y la razón de áreas.**

Objetivo: Verificar que la razón entre las áreas de figuras semejantes es el cuadrado de la razón de semejanza.

Idea didáctica: Promover la formulación de una conjetura sobre la relación entre la razón lineal y la razón de áreas, mediante la observación inductiva de múltiples casos generados por el arrastre.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Abrir el archivo de la Actividad 2 (**triángulos ABC y A'B'C'** con deslizador k). Si no lo conservó, repita la construcción.
2. Con la herramienta **Área**, calcular el área del **triángulo ABC** y del **triángulo A'B'C'**. Los valores aparecerán en la vista algebraica.
3. Calcular la razón entre áreas y el cuadrado de k , para ello, en la Barra de Entrada, escribir:

$$\text{razon} = \text{Area} (A', B', C') / \text{Area} (A, B, C)$$





$k_{\text{cuadrado}} = k^2$

Nota: En la **Barra de Entrada** algunas versiones de GeoGebra no aceptan tildes.

4. Verificar que los dos valores coinciden numéricamente.
5. Con la herramienta **Texto** hacer clic en una zona libre de la vista gráfica. En el cuadro de diálogo **Editar**, construir la expresión combinando texto fijo con los objetos dinámicos:
 - Escribir directamente: “**Razón de áreas =**” y desde el menú **Objetos**, seleccionar “**razón**”.
 - Escribir a continuación, “ **k^2 =**” y desde el menú **Objetos**, seleccionar “ **k_{cuadrado}** ”.
6. Mover el deslizador k a distintos valores y registrar los resultados en la tabla 6.1 (Figura 6.4).

Tabla 6.1. Relación entre el factor de escala (k), su cuadrado (k^2) y la razón de áreas.

k	k^2	Razón de áreas
0,5		
1		
1,5		
2		
2,5		
3		

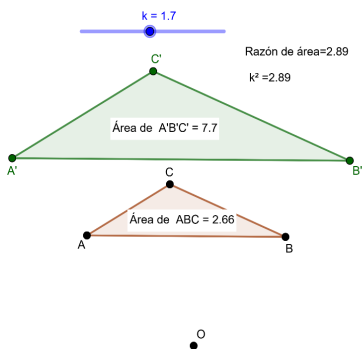


Figura 6.4. Razón de semejanza y razón de áreas: la regla del cuadrado.

Preguntas para la reflexión:

- a) Observación:** Al completar la tabla del paso 5, ¿qué relación se mantiene entre la razón de áreas y el valor de k^2 ?
- b) Comprensión:** ¿Por qué, al duplicar los lados de una figura, su área no se duplica, sino que se cuadruplica? Intente justificarlo a partir de la fórmula del área de un cuadrado o un rectángulo (área = base $\times$ altura).
- c) Conjetura:** Si dos figuras semejantes tienen una razón de semejanza igual a 3, ¿cuál será la razón entre sus áreas? Y si fueran cuerpos tridimensionales semejantes (por ejemplo, dos cubos cuyas aristas estuvieran en razón 3), ¿cuál cree que sería la razón entre sus volúmenes? Formule una conjetura general.

Síntesis del apartado

El apartado ha desplazado la atención del estudiante desde la conservación de medidas hacia la conservación de proporciones. La primera actividad introdujo la semejanza a través de la homotecia, permitiendo verificar dinámicamente que, cuando una figura se amplía o se reduce con razón k , los ángulos correspondientes permanecen invariantes y los lados correspondientes mantienen una razón constante igual a k . La segunda actividad profundizó en una consecuencia estructural menos evidente, esto es, que la razón entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón entre sus lados. Este resultado, que la observación dinámica permite construir por vía inductiva, abre la posibilidad de generalizaciones a tres dimensiones y prepara conceptualmente el ingreso al teorema de Tales, donde la proporcionalidad emerge no como propiedad de una figura aislada, sino como propiedad estructural derivada del paralelismo entre rectas.





6.3. El teorema de Tales: la geometría de la proporcionalidad

El teorema de Tales constituye uno de los resultados más antiguos de la geometría y, paradójicamente, uno de los más frecuentemente enseñados como simple fórmula. Su formulación habitual en la escuela, según la cual los segmentos que un haz de paralelas determina sobre dos transversales son proporcionales entre sí, resume una propiedad estructural profunda pero rara vez es comprendida como tal. Demasiado a menudo se reduce a un dispositivo de cálculo, una proporción que se resuelve mecánicamente con productos cruzados sin que el estudiante entienda qué propiedad geométrica está poniendo en juego.

Lo que el teorema de Tales realmente expresa es que el paralelismo entre rectas es una condición geométrica con consecuencias métricas. Cuando varias paralelas intersecan a dos rectas no paralelas, la regularidad del corte queda determinada por la disposición del haz, no por la longitud absoluta de los segmentos involucrados. Es decir, la proporcionalidad no surge de los segmentos en sí, sino de la estructura geométrica en la que están inscritos. Esta es la idea que el estudiante debe construir, y para lograrlo conviene que la verifique experimentalmente en un entorno donde pueda alterar el paralelismo y observar qué ocurre con las razones cuando esa condición se rompe.

Las dos actividades de este apartado abordan esta idea en dos movimientos. La primera presenta el teorema en su forma directa, conduciendo al estudiante a observar la igualdad entre las razones generadas por un haz de paralelas y verificando, mediante un caso de control negativo, que el paralelismo es una condición necesaria. La segunda aplica el teorema en una de sus consecuencias clásicas, la división de un segmento en partes iguales, mostrando que la proporcionalidad geométrica puede explotarse constructivamente. Al final del apartado, el estudiante habrá pasado del

teorema como enunciado al teorema como herramienta, comprendiendo que la proporcionalidad entre segmentos es una expresión de la estructura paralela del plano y no una propiedad numérica aislada.

- **Actividad con GeoGebra 1: El teorema de Tales: la proporcionalidad entre paralelas.**

Objetivo: Verificar el teorema de Tales como relación de proporcionalidad entre segmentos determinados por rectas paralelas.

Idea didáctica: Mostrar que el teorema de Tales no es una fórmula que deba memorizarse, sino la expresión geométrica de una propiedad estructural: la proporcionalidad entre segmentos generada por el paralelismo.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Recta**, trazar dos rectas **r** y **s** que se corten en un punto **V**. Estas serán las dos transversales del haz de paralelas.
2. Con la herramienta **Punto**, ubicar un punto auxiliar **P** en la vista gráfica. Con la herramienta **Recta**, trazar una recta **t** que pase por **P**; esta será la dirección común del haz de paralelas.
3. Con la herramienta **Punto**, ubicar tres puntos **A**, **B** y **C** sobre la recta **r**.
4. Con la herramienta **Recta paralela**, trazar por **A** una paralela a **t**, y la herramienta **Intersección** marcar su intersección con **s** como **A'**. Repetir el procedimiento para **B** y **C**, obteniendo **B'** y **C'** sobre **s**.
5. Con la herramienta **Distancia o Longitud**, medir los segmentos consecutivos sobre cada transversal: $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ sobre **r**; $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ sobre **s**.
6. Calcular las razones del teorema de Tales, para ello, en la **Barra de Entrada**, definir las dos razones que deben ser iguales según el teorema:
 - **razon_r = Distancia (A, B) / Distancia (B, C)**





- **razon_s = Distancia (A', B') / Distancia (B', C')**

Verificar en la vista algebraica que ambos valores coinciden.

7. Con la herramienta **Texto** mostrar el resultado en pantalla. Al hacer clic en la vista gráfica, en el cuadro de diálogo **Editar**, construir la expresión combinando texto fijo con los objetos dinámicos:

- Escribir directamente: **AB/BC =** y desde el menú **Objetos**, seleccionar **razon_r**.
- Escribir a continuación, con varios espacios para separar: **A'B'/B'C' =** y desde el menú **Objetos**, seleccionar **razon_s**.
- Confirmar con OK.

8. Con la herramienta **Mueve**, arrastrar los puntos **A**, **B** y **C** sobre la recta **r** para variar las posiciones del haz de paralelas, y arrastrar también el punto **P** o los puntos que definen **r** y **s** para modificar la dirección común del haz o la inclinación de las transversales. Observar que la igualdad entre las dos razones se conserva en todo momento, mientras el paralelismo del haz se mantenga.

9. Caso de control negativo: Seleccionar una de las paralelas (por ejemplo, la que pasa por **B**) y modificarla para que deje de ser paralela a las demás. Observar que las dos razones dejan de coincidir. Esta verificación muestra que el paralelismo es una condición necesaria para la proporcionalidad (Figura 6.5).

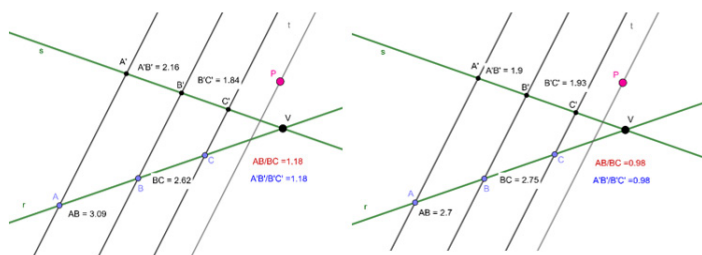


Figura 6.5. El teorema de Tales: cuando un haz de paralelas divide proporcionalmente a dos transversales.

Preguntas para la reflexión:

- a) **Observación:** Al mover los puntos de la construcción manteniendo el paralelismo, los segmentos cambian de longitud. ¿Qué ocurre con la razón $\overline{AB}/\overline{BC}$ y la razón $\overline{A'B'}/\overline{B'C'}$?
- b) **Comprensión:** En el paso 7 se rompió el paralelismo de una de las rectas y la igualdad de razones desapareció. ¿Qué papel cumple, entonces, el paralelismo en esta configuración? ¿Por qué es una condición necesaria?
- c) **Conjetura:** Formule el teorema de Tales con sus propias palabras a partir de lo observado. Su enunciado debería capturar la relación entre el paralelismo del haz y la proporcionalidad de los segmentos que determina sobre las transversales.
- **Actividad con GeoGebra 2: Aplicación del teorema de Tales: dividir un segmento en partes iguales.**

Objetivo: Aplicar el teorema de Tales para dividir un segmento en partes iguales mediante una construcción geométrica.

Idea didáctica: Trascender el dibujo estático del cuaderno. Al utilizar un segmento dinámico y una semirrecta auxiliar con ángulo variable, el estudiante puede comprobar que la división proporcional es una propiedad geométrica intrínseca que no depende ni de la longitud del segmento original ni de la dirección de la recta auxiliar.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Segmento**, trazar el segmento $\overline{AB}$ que se desea dividir. Conviene orientarlo aproximadamente en horizontal para que la construcción auxiliar quede claramente visible.
2. Con la herramienta **Semirrecta**, trazar una semirrecta con origen en **A** y dirección hacia un punto **C** cualquiera, distinto de la dirección de $\overline{AB}$.





3. Con la herramienta **Deslizador**, crear un deslizador tipo **Número** llamado **u**, con valores entre 0.1 y 5. Este controlará la separación entre los puntos auxiliares; su variación servirá más adelante como caso de control para verificar la invariancia de la división.
4. Construir cinco puntos sucesivos **P₁**, **P₂**, **P₃**, **P₄** y **P₅** sobre la semirrecta, separados todos por la misma distancia **u**:
 - Con la herramienta **Circunferencia (centro, radio)**, trazar una circunferencia con centro en **A** y radio **u**. Con la herramienta **Intersección**, marque su corte con la semirrecta como **P₁**.
 - Con la herramienta **Circunferencia (centro, radio)**, trazar una circunferencia con centro en **P₁** y radio **u**. Con la herramienta **Intersección**, marque su corte con la semirrecta como **P₂**.
 - Repetir el procedimiento para obtener **P₃**, **P₄** y **P₅**.
 - Oculte las circunferencias auxiliares desactivando **Mostrar objeto**.
5. Con la herramienta **Segmento**, unir el último punto **P₅** con el extremo **B** del segmento .
6. Con la herramienta Recta paralela, trazar por cada uno de los puntos **P₁**, **P₂**, **P₃** y **P₄** una recta paralela al segmento **P₅B**.
7. Con la herramienta **Intersección**, marcar los puntos donde cada paralela interseca al segmento **AB** . Renómbrellos como **D₁**, **D₂**, **D₃** y **D₄**. Estos cuatro puntos dividen el segmento **AB** en cinco partes iguales.
8. Con la herramienta Distancia o Longitud, medir los cinco segmentos resultantes (**AD₁**, **D₁D₂**, **D₂D₃**, **D₃D₄** y **D₄B**). Verificar que sus longitudes son numéricamente iguales (Figura 6.6).

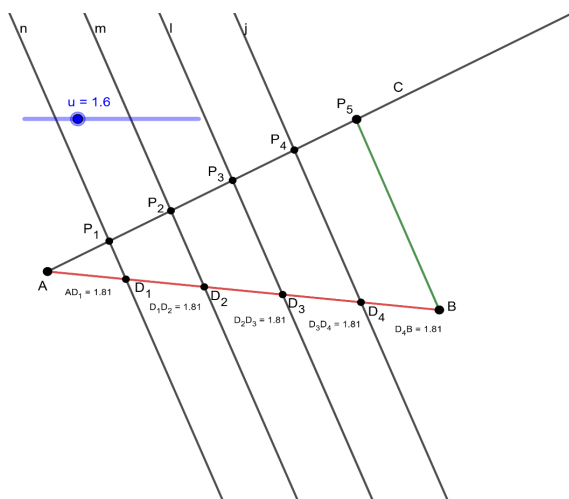


Figura 6.6. División de un segmento en cinco partes iguales mediante el teorema de Tales.

Preguntas para la reflexión

a) Observación: Al desplazar el punto B (modificando la longitud de $\overline{AB}$) o el punto C (modificando la inclinación de la semirrecta auxiliar), ¿qué ocurre con la división del segmento? ¿Y si cambia el valor del desplazador u ? ¿Qué sucede visualmente si la semirrecta auxiliar queda casi sobre el segmento $\overline{AB}$?

b) Comprensión: ¿Por qué es fundamental que las rectas proyectantes sean paralelas entre sí para que la construcción funcione? Apoyándose en la semejanza de triángulos (Actividad 2), justifique por qué los segmentos resultantes en tienen la misma longitud.

c) Conjetura: Si los puntos sobre la semirrecta auxiliar estuvieran a distancias proporcionales a 1, 2, 3, 4 y 5, ¿qué relación guardarían los segmentos proyectados en $\overline{AB}$? ¿Cómo aprovecharía este principio para dividir un segmento en una razón dada, por ejemplo **2:3:5**? ¿Funcionaría el mismo procedimiento si se sustituyera la semirrecta auxiliar por una circunferencia, o si se quisiera dividir una línea curva en arcos



iguales? Justifique a partir de las condiciones que exige el teorema de Tales.

Síntesis del apartado

El apartado ha presentado el teorema de Tales no como una fórmula que deba memorizarse, sino como la expresión geométrica de una propiedad estructural, en la que la proporcionalidad entre segmentos surge directamente del paralelismo entre rectas. La primera actividad permitió observar dinámicamente la igualdad entre las razones generadas por un haz de paralelas, y verificar mediante un caso de control negativo que el paralelismo es una condición necesaria, no accesoria, de la proporcionalidad. La segunda actividad mostró cómo este principio puede explotarse constructivamente para dividir un segmento en partes iguales, transformando un enunciado teórico en una herramienta operativa. Al concluir el apartado, el estudiante dispone de una comprensión articulada de la proporcionalidad geométrica, que se suma a las relaciones de congruencia y semejanza ya trabajadas en este capítulo y completa el panorama de las relaciones métricas entre figuras que el Tomo I se ha propuesto explorar.

El recorrido propuesto en este capítulo ha desplazado la atención del estudiante desde la estructura interna de las figuras, trabajada en el capítulo anterior, hacia las relaciones métricas que articulan unas figuras con otras. La geometría escolar deja de ser, en este tramo, un inventario de objetos individuales y comienza a estudiarse como un sistema de relaciones donde la conservación es la categoría conceptual central. Tres tipos de invariancia, conceptualmente distintos, pero estructuralmente conectados, han organizado el capítulo, esto es, la invariancia bajo movimiento, la invariancia bajo cambio de escala y la invariancia bajo proyección paralela.

El primer apartado, dedicado a la congruencia, mostró que dos figuras son congruentes cuando una puede



obtenerse de la otra mediante un movimiento rígido del plano, esto es, una traslación, una rotación o una reflexión que preserva todas sus medidas. La función de arrastre de GeoGebra resultó particularmente productiva para hacer visible este invariante en una familia continua de configuraciones, no solo en casos aislados. La segunda actividad puso a prueba qué información determina la congruencia de un triángulo, mostrando que tres lados (LLL) lo determinan de manera única mientras que tres ángulos (AAA) producen una familia de triángulos con la misma forma, pero distinto tamaño. Esta asimetría entre lo que conserva la congruencia y lo que conserva la forma motivó conceptualmente la entrada al apartado siguiente.

El segundo apartado, dedicado a la semejanza, formalizó la relación que las figuras AAA habían anticipado. Se mostró que la semejanza supone simultáneamente la igualdad de ángulos y la proporcionalidad de lados, y que la homotecia constituye un caso particular elegante para generar figuras semejantes a partir de una figura dada. La segunda actividad del apartado profundizó en una consecuencia estructural menos intuitiva, esto es, que la razón entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón entre sus lados, y que en tres dimensiones esa relación se eleva al cubo. Este resultado, contraintuitivo para muchos estudiantes, abrió la puerta a una comprensión más profunda del comportamiento de las magnitudes bajo cambios de escala.

El tercer apartado, dedicado al teorema de Tales, completó el panorama presentando la proporcionalidad no como propiedad de figuras semejantes, sino como propiedad estructural derivada del paralelismo entre rectas. El estudiante observó que cuando un haz de paralelas interseca a dos transversales, los segmentos correspondientes guardan razones iguales, y que esta igualdad desaparece en cuanto el paralelismo se rompe. La segunda actividad del apartado mostró además cómo el teorema puede explotarse





constructivamente para dividir un segmento en partes iguales o en cualquier razón dada, transformando un enunciado teórico en una herramienta operativa de la geometría.

A lo largo del capítulo, la mediación didáctica ha tenido un papel determinante. La construcción dinámica, la prueba del arrastre, la verificación de invariantes y la inducción de conjeturas a partir de la observación regular han permitido que el estudiante construya, por experiencia y no por recepción, los tres tipos de invariancia que estructuran la geometría métrica elemental. Las relaciones métricas dejan de ser fórmulas a aplicar y pasan a ser propiedades a comprender. Este desplazamiento prepara la mirada para el capítulo siguiente, en el que los polígonos, y muy particularmente los cuadriláteros, serán estudiados como familias de figuras cuya clasificación inclusiva exige movilizar simultáneamente las ideas de propiedad, congruencia, semejanza y proporcionalidad que aquí han quedado consolidadas.

Preguntas para la reflexión docente

- Sobre las concepciones previas y los obstáculos
- 1. ¿Cómo enseña usted habitualmente la congruencia y cuánto de esa enseñanza se sostiene en la verificación visual de la igualdad de figuras, frente a una verificación estructural basada en la conservación de longitudes y ángulos bajo movimientos del plano? ¿Qué oportunidades didácticas se pierden cuando los estudiantes asocian la congruencia con la mera coincidencia visual, sin reconocer el papel de la traslación, la rotación y la reflexión?
- 2. ¿Qué representaciones previas de la semejanza traen sus estudiantes? ¿Asocian la semejanza con un parecido visual, con una ampliación o reducción, o con una relación matemática precisa entre ángulos y razones? ¿De qué manera podría usted

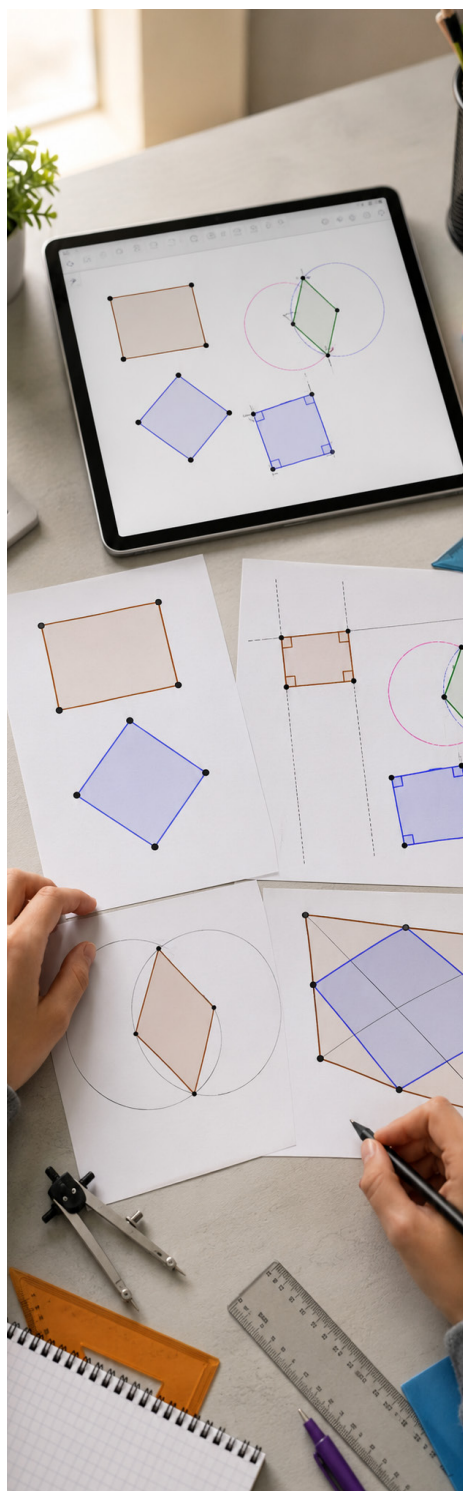
- aprovechar el conflicto entre estas representaciones para enriquecer la comprensión del concepto?
- Sobre los criterios de congruencia y la distinción con la semejanza
3. ¿Cómo introduce usted los criterios de congruencia de triángulos (LLL, LAL, ALA) y qué lugar ocupan en su enseñanza la deducción a partir de la experimentación y la simple memorización del enunciado? ¿Considera que sus estudiantes alcanzan a comprender por qué AAA no es un criterio de congruencia sino de semejanza?
 4. ¿Qué importancia atribuye a la distinción entre congruencia y semejanza en la formación geométrica de sus estudiantes? ¿Logra que esa distinción se construya como un par conceptual articulado, o tiende a presentarse en su enseñanza como dos temas separados sin diálogo entre sí?
 - Sobre la proporcionalidad como obstáculo cognitivo
 5. ¿En qué momento del trabajo escolar identifica usted la transición del pensamiento aditivo al pensamiento proporcional en sus estudiantes? ¿Qué estrategias incorrectas observa con mayor frecuencia cuando los estudiantes enfrentan situaciones de proporcionalidad, y cómo las aprovecha didácticamente para construir el razonamiento proporcional?
 6. ¿Cómo trabaja usted la regla del cuadrado, esto es, el hecho de que al duplicar los lados de una figura el área se cuadruplica, y al triplicarlos el área se hace nueve veces mayor? ¿Sus estudiantes alcanzan a comprender este resultado por vía conceptual, o lo aceptan únicamente por verificación numérica?
 7. ¿Cómo presenta el teorema de Tales en su aula? ¿Como una fórmula útil para resolver problemas, como un caso particular de semejanza, o como la expresión estructural de la relación entre paralelismo y proporcionalidad? ¿Qué consecuencias didácticas tiene cada una de estas presentaciones



para la comprensión que sus estudiantes alcanzan a construir?

- Sobre la mediación didáctica y el uso de GeoGebra
8. ¿En qué momentos del trabajo con congruencia, semejanza y proporcionalidad resulta verdaderamente fértil el uso de GeoGebra, y en qué momentos podría reemplazarse sin pérdida por construcciones con regla y compás o por argumentos analíticos? ¿Qué criterios utiliza para decidir entre un entorno y otro según el contenido específico que está enseñando?
 9. ¿Cómo aprovecha la prueba del arrastre para que sus estudiantes verifiquen que una propiedad métrica se conserva en una familia completa de configuraciones y no solo en un caso particular? ¿Qué preguntas formula durante la exploración dinámica para que la observación inductiva se convierta en conjetura formulada y en argumento justificado?
 10. ¿De qué manera articula, en la planificación de una clase, el tiempo dedicado al cálculo numérico con el tiempo dedicado a la discusión sobre la estructura geométrica que sustenta ese cálculo? ¿Cuál de los dos tiempos suele predominar cuando enseña semejanza o proporcionalidad, y qué efectos didácticos tiene esa decisión sobre el aprendizaje?





07.

Los cuadriláteros entre los polígonos

7.1. Cuadriláteros y polígonos: de la forma a la propiedad

Este capítulo aborda el estudio de los cuadriláteros y los polígonos desde una perspectiva centrada en las propiedades geométricas y no únicamente en la apariencia de las figuras. A partir de diversas actividades apoyadas en GeoGebra, se busca que los estudiantes superen la dependencia de prototipos visuales y avancen hacia una comprensión más flexible y jerárquica de las relaciones entre las distintas clases de figuras.

A lo largo del capítulo se exploran cuestiones como la clasificación de cuadriláteros, las relaciones de inclusión entre figuras, la diferencia entre dibujo y construcción geométrica y la generalización de propiedades hacia polígonos de n lados. El



uso de construcciones dinámicas permite observar invariantes, formular conjeturas y justificar propiedades, favoreciendo un razonamiento geométrico basado en la argumentación y no solo en el reconocimiento visual.

El caso de los cuadriláteros es especialmente importante porque en él se hacen visibles muchas de las dificultades típicas de la enseñanza de la geometría. Investigaciones han mostrado que los estudiantes suelen apoyarse en imágenes prototípicas para reconocer cuadrados, rectángulos, rombos y paralelogramos, y que esa dependencia visual dificulta la construcción de clasificaciones jerárquicas. De ahí que resulte común encontrar respuestas como “un cuadrado no es un rectángulo” o “un rombo es una figura distinta del cuadrado”, aun cuando esas afirmaciones contradigan las definiciones matemáticas (Fujita y Jones, 2007).

Por ejemplo, cuando se trata del trapecio muchos estudiantes aprenden esta figura asociada a una imagen muy específica, un cuadrilátero como un balde, con la base mayor abajo, la base menor arriba y dos lados oblicuos simétricos. Cuando se les muestra un trapecio rectángulo, con dos ángulos rectos contiguos, o un trapecio escaleno con los lados muy desiguales, suelen dudar e incluso negar que sean trapecios. La situación se complica más cuando se les presenta un paralelogramo y se les pregunta si es un trapecio. Bajo la definición inclusiva (al menos un par de lados paralelos), dirían sí lo es. Sin embargo, bajo la exclusiva (exactamente un par), contestan que no. Este caso permite trabajar simultáneamente la dependencia visual y la convención que toda definición conlleva.

La enseñanza de los cuadriláteros no debería limitarse a nombrarlos y dibujarlos, sino abrir espacio para comparar propiedades, discutir contraejemplos y explorar relaciones de inclusión entre clases de figuras. En lugar de preguntar solo ¿qué figura es esta?, puede ser más significativo proponer tareas como: busca

todas las figuras que tengan cuatro lados iguales, o decide cuáles de estas figuras cumplen la definición de rectángulo y explica por qué.

Una tarea particularmente ilustrativa consiste en pedir a los estudiantes que dibujen un cuadrilátero con exactamente dos ángulos rectos. La consigna parece sencilla, pero produce respuestas muy diversas. Algunos dibujan rectángulos y los descartan al notar que tienen cuatro ángulos rectos; otros producen un trapecio rectángulo; otros una figura no convexa con dos ángulos rectos no contiguos. Discutir cuáles de estas figuras cumplen efectivamente la condición y cuántas familias distintas de cuadriláteros la satisfacen, exige razonar a partir de propiedades, no de imágenes memorizadas. Una variante más exigente, sería pedirles que, “dibujen un cuadrilátero con exactamente tres ángulos rectos”, resulta imposible y obliga al estudiante a justificar por qué. Este tipo de actividad desplaza la atención de la imagen a la definición, y de la definición a las relaciones entre clases de figuras.

GeoGebra puede desempeñar un papel importante, porque permite variar la orientación, la forma y las dimensiones de una figura sin perder las propiedades con las que fue construida. Una actividad significativa consiste en pedir a los estudiantes que construyan un rombo de dos maneras distintas. En la primera, simplemente dibujan a ojo cuatro segmentos que parezcan iguales y los unen. En la segunda, lo construyen a partir de propiedades, por ejemplo, mediante dos diagonales perpendiculares que se intersecan en su punto medio, uniendo después los extremos.

Al arrastrar un vértice de cada figura, la primera se deforma y deja de ser un rombo, mientras que la segunda conserva sus propiedades sin importar cómo se manipule. Esta diferencia entre un dibujo que parece representar un rombo y una construcción que conserva sus propiedades hace tangible, para el





estudiante, la distinción entre apariencia y propiedad geométrica, que de otro modo suele permanecer en el plano del discurso del docente. Así, la herramienta ayuda a cuestionar la dependencia de prototipos y a hacer visible que una misma figura puede conservar su identidad geométrica aun cuando cambie su apariencia. De este modo, el trabajo con cuadriláteros se convierte en un espacio especialmente rico para discutir el valor de las propiedades, el papel de las definiciones y la necesidad de argumentar con mayor precisión (Duval, 2006; Laborde, 2000).

Aunque el análisis se ha centrado en los cuadriláteros, la misma lógica se extiende al estudio de los polígonos en general. La tendencia a reconocer las figuras por su apariencia, la dificultad para aceptar relaciones de inclusión entre clases y la necesidad de apoyarse en propiedades antes que en imágenes son fenómenos que reaparecen al trabajar con polígonos de cualquier número de lados. La distinción entre figuras convexas y no convexas es un ejemplo muy ilustrativo. Si se pregunta a los estudiantes ¿una estrella de cinco puntas es un polígono?, muchos responden que no, porque mentalmente polígono remite a figuras cerradas, compactas o regulares. Sin embargo, una estrella de cinco puntas es un decágono no convexo perfectamente válido. La misma pregunta admite el camino inverso, mostrar un cuadrilátero no convexo, en forma de flecha o boomerang, y discutir si sigue siendo cuadrilátero.

Cuestiones como la suma de los ángulos interiores o la distinción entre figuras convexas y no convexas no se resuelven solo observando, sino analizando propiedades y argumentando a partir de ellas. Por eso, el trabajo con cuadriláteros puede entenderse como un caso paradigmático que abre la puerta a un modo más general de pensar la enseñanza de los polígonos.

Las actividades que se presentan en el apartado que sigue buscan llevar a la práctica pedagógica

estas ideas. No pretenden agotar el estudio de los cuadriláteros y los polígonos, sino ofrecer puntos de partida para que los estudiantes se desplacen del reconocimiento visual hacia el análisis de propiedades y la discusión de definiciones.

Síntesis del apartado

El estudio de los cuadriláteros constituye un caso paradigmático de las dificultades propias del aprendizaje geométrico, porque en él se hace evidente la fuerza de las imágenes prototípicas con que los estudiantes reconocen las figuras y la consiguiente resistencia a aceptar clasificaciones jerárquicas y relaciones de inclusión. Superar esta dependencia visual exige desplazar la enseñanza desde el simple reconocimiento y nombrado de figuras hacia el análisis de propiedades, la discusión de definiciones y el uso de contraejemplos, apoyándose en herramientas como GeoGebra que permiten distinguir la apariencia de la propiedad geométrica. Esta misma lógica, aunque ilustrada con los cuadriláteros, se proyecta sobre el estudio de los polígonos en general, donde la argumentación a partir de propiedades resulta indispensable para tratar cuestiones que la mera observación no resuelve.

7.2. Cuadriláteros: de la apariencia a la propiedad

Este apartado busca favorecer el paso desde una comprensión apoyada en la apariencia de las figuras hacia una comprensión basada en propiedades y definiciones. En el caso de los cuadriláteros, interesa especialmente cuestionar la dependencia de prototipos visuales y mostrar que una misma figura conserva su identidad geométrica más allá de los cambios accidentales de su representación, como la orientación, el tamaño o la posición.

Las actividades aquí reunidas comparten un mismo eje conceptual: el tránsito desde un razonamiento





figural, centrado en la percepción de las formas, hacia un razonamiento sustentado en las relaciones que las definen. Para ello, los estudiantes son invitados a observar lo que cambia y lo que permanece al manipular una figura, a comparar propiedades de distintos cuadriláteros y, sobre todo, a distinguir entre dibujar una figura y construirla bajo condiciones geométricas precisas. GeoGebra se incorpora como herramienta de mediación didáctica para hacer visible esta diferencia, ya que la prueba del arrastre permite verificar empíricamente si una construcción conserva sus propiedades o si solo reproduce una apariencia (Duval, 2006; Fujita y Jones, 2007; Laborde, 2000).

- **Actividad con GeoGebra 1: El cuadrado girado: más allá del prototipo.**

Objetivo: Verificar que la orientación de una figura no modifica sus propiedades geométricas.

Idea didáctica: Cuestionar la dependencia de prototipos visuales y desplazar la atención del estudiante desde la apariencia global de la figura hacia las propiedades que la definen. En este caso, interesa mostrar que la orientación no forma parte de la definición de cuadrado.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Punto**, ubicar dos puntos **A** y **B** en la vista gráfica.
2. Con la herramienta **Polígono regular**, construir el cuadrado **ABCD** a partir de **A** y **B**.
3. Con la herramienta **Rotación**, rotar cada uno de los vértices **A**, **B**, **C** y **D** respecto al centro **E** y con un mismo ángulo (se sugiere uno no múltiplo de 90° , por ejemplo 30° o 37°), obteniendo **A'**, **B'**, **C'** y **D'**.
4. Con la herramienta **Polígono**, unir **A'**, **B'**, **C'** y **D'** para formar el cuadrado rotado.

5. Con las herramientas **Distancia o Longitud** y **Ángulo**, medir lados y ángulos internos de ambos cuadrados y compararlos.
6. Con la herramienta **Mover**, arrastrar **A** o **B** (o el centro **E**) y observar qué cambia y qué permanece invariante.

Nota. En esta actividad no se rota el cuadrado completo como objeto único porque, al hacerlo, GeoGebra no permite medir directamente los lados y ángulos del polígono imagen. Pero la decisión también es didáctica ya que, rotar cada vértice por separado hace visible que la rotación actúa punto a punto, y que el cuadrado rotado emerge naturalmente al unir los vértices imagen. Esta es, justamente, la idea central de las transformaciones del plano (Figura 7.1).

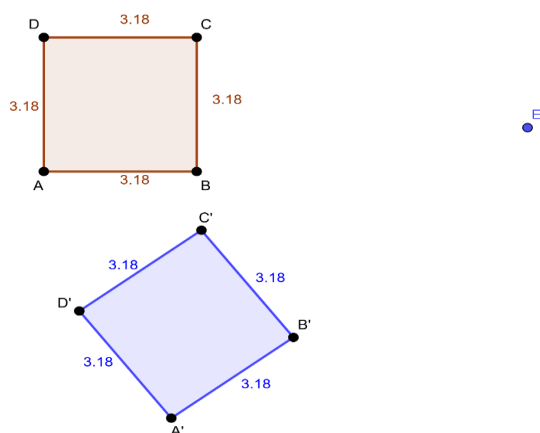


Figura 7.1. Más allá del prototipo: el cuadrado mantiene sus propiedades, aunque cambie de orientación.

Preguntas para la reflexión:

- a) **Observación:** ¿Qué cambia cuando el cuadrado gira o cambia de posición? ¿Qué permanece? ¿Los lados siguen teniendo la misma longitud? ¿Los ángulos continúan siendo rectos?





b) Comprensión: ¿Qué condiciones debe cumplir una figura para ser un cuadrado? ¿La orientación forma parte de esa definición? ¿Qué cambia solo en apariencia y qué se conserva como propiedad? ¿Por qué una figura puede verse distinta y seguir siendo el mismo tipo de cuadrilátero?

c) Conjetura: Si una figura tiene cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos, ¿deja de ser cuadrado al rotarla? ¿Qué rasgos del dibujo cambian solo en apariencia? ¿Podemos afirmar que un cuadrado sigue siendo cuadrado, aunque cambie su posición en la hoja o en la pantalla?

• **Actividad con GeoGebra 2: Rectángulo, rombo y cuadrado: comparar propiedades.**

Objetivo: Comparar las propiedades de rectángulo, rombo y cuadrado para reconocer sus relaciones de inclusión.

Idea didáctica: Favorecer el paso de una clasificación basada en nombres e imágenes prototípicas a una comprensión sustentada en propiedades y en relaciones de inclusión entre clases de figuras.

Construcción sugerida en GeoGebra:

A) Construcción de un rectángulo

1. Con la herramienta **Punto**, ubicar dos puntos **A** y **B** en la vista gráfica.
2. Con la herramienta **Segmento**, trazar el segmento **$\overline{AB}$** .
3. Con la herramienta Recta perpendicular, construir una recta perpendicular a **$\overline{AB}$** que pase por **A**.
4. Colocar sobre esa perpendicular un punto **D**.
5. Con la herramienta **Recta paralela**, trazar por **D** una recta paralela a **$\overline{AB}$** .
6. Trazar por **B** una recta paralela a **$\overline{AD}$** .

7. Con la herramienta **Intersección** marcar como **C** el punto de intersección de esas dos rectas.
8. Con la herramienta **Polígono**, unir **A**, **B**, **C** y **D** para formar el rectángulo.

B) Construcción de un rombo

9. En otra zona de la vista gráfica, con la herramienta **Segmento** construir un segmento $\overline{EF}$.
10. Con la herramienta **Circunferencia (centro, radio)**, trazar una circunferencia con centro en **E** y radio $\overline{EF}$.
11. Trazar otra circunferencia con centro en **F** y radio $\overline{EF}$.
12. Con la herramienta **Intersección**, marcar uno de los puntos de intersección de ambas circunferencias como **G** y **H**.
13. Con la herramienta **Polígono**, unir **E**, **G**, **F** y **H** para formar el rombo.

C) Construcción de un cuadrado

14. En otra zona de la vista gráfica con la herramienta **Punto**, ubicar dos puntos **I** y **J**.
15. Seleccionar la herramienta **Polígono regular**, hacer clic en **I** y luego en **J**, e indicar que el polígono tendrá 4 vértices.
16. GeoGebra construirá automáticamente el cuadrado.

D) Mostrar propiedades para comparar

17. Con la herramienta **Distancia o Longitud**, hacer clic en los lados de cada figura para mostrar sus medidas.
18. Con la herramienta **Ángulo**, marcar los ángulos interiores de cada cuadrilátero.
19. Si se desea comparar diagonales, usar la herramienta **Segmento** para trazarlas y luego aplicar **Distancia o Longitud**.



20. Con la herramienta **Mover**, arrastrar los puntos de control de cada figura cuando sea posible, sin que pierdan su naturaleza geométrica.
21. Registrar en una tabla comparativa lo observado sobre: longitud de los lados, medida de los ángulos, diagonales, y propiedades compartidas entre rectángulo, rombo y cuadrado (Figura 7.2).

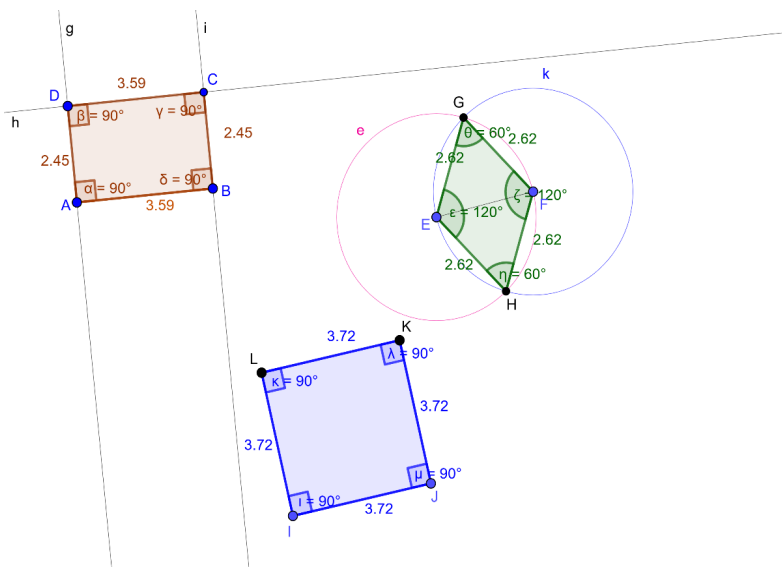


Figura 7.2. Análisis comparativo de cuadriláteros: rectángulo, rombo y cuadrado.

Preguntas para la reflexión:

- a) Observación:** ¿Qué propiedades comparten estas figuras? ¿En qué se diferencian? ¿Qué ocurre con sus diagonales, sus lados y sus ángulos al compararlas?
- b) Comprensión:** ¿Qué define a un rectángulo? ¿Qué define a un rombo? ¿Qué condiciones cumple un cuadrado que lo relacionan con ambas figuras?
- c) Conjetura:** ¿Podemos afirmar que todo cuadrado es un rectángulo? ¿Podemos afirmar también que todo cuadrado es un rombo? ¿Qué propiedad o conjunto de propiedades permite sostener esas afirmaciones?



- **Actividad con GeoGebra 3: Construir un rombo que no se desarme.**

Objetivo: Distinguir entre un rombo dibujado por apariencia y un rombo construido bajo la condición de cuatro lados iguales.

Idea didáctica: Mostrar que una figura no queda definida porque “se parece” a otra, sino porque fue construida bajo condiciones geométricas precisas. En este caso, interesa que el estudiante advierta que un rombo no es solo un cuadrilátero inclinado, sino una figura con cuatro lados de igual longitud, propiedad que debe conservarse al arrastrarla.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Punto**, ubicar dos puntos **A** y **C** en la vista gráfica.
2. Con la herramienta **Segmento**, trazar el segmento $\overline{AC}$. Este segmento servirá como referencia para la longitud de los lados del rombo.
3. Con la herramienta **Circunferencia (centro y radio)**, trazar una circunferencia con centro en **A** y radio igual a la longitud del segmento $\overline{AC}$ y otra segunda circunferencia con centro en **C** y radio también igual a la longitud de $\overline{AC}$.
4. Con la herramienta **Intersección**, marcar los dos puntos donde se intersecan las circunferencias. Nombrarlos, por ejemplo, **B** y **D**.
5. Con la herramienta **Polígono**, unir los puntos en este orden: **A, B, C, D**, y cerrar nuevamente en **A**. Así se obtiene un rombo.
6. Con la herramienta **Distancia o Longitud**, mostrar la medida de sus cuatro lados.
7. Si se considera pertinente, usar también la herramienta **Ángulo** para mostrar algunos ángulos interiores, o la herramienta **Segmento** para trazar las diagonales.



8. Con la herramienta **Mover**, arrastrar los puntos de control de la construcción y observar si la figura conserva la igualdad de sus cuatro lados (Figura 7.3).

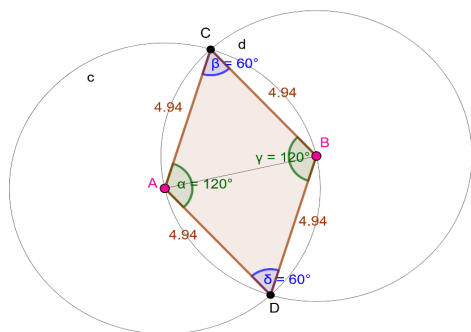


Figura 7.3. Construcción robusta de un rombo a partir de una diagonal y dos circunferencias congruentes.

Nota. Esta construcción produce un rombo particular (con ángulos de 60° y 120°), porque el radio de ambas circunferencias coincide con la longitud de la diagonal AB. La actividad muestra que, sea cual sea el tamaño que se le dé al arrastrar A o B, los cuatro lados se mantienen iguales, la propiedad definitoria del rombo se conserva. Como actividad adicional, exploraremos qué cambiaría en la construcción para obtener rombos con ángulos distintos.

Preguntas para la reflexión:

- a) **Observación:** ¿Qué ocurre cuando se arrastran los vértices? ¿La figura conserva sus cuatro lados iguales? ¿Qué diferencia observas entre un rombo dibujado a ojo y uno construido bajo condiciones?
- b) **Comprensión:** ¿Qué propiedad define al rombo? ¿Qué relaciones de la construcción garantizan que siga siendo un rombo? ¿Por qué una figura puede parecer correcta y, sin embargo, no estar geométricamente garantizada?
- c) **Conjetura:** Si una figura conserva sus cuatro lados iguales al arrastrarla, ¿qué podemos afirmar sobre



su construcción? ¿Basta con la igualdad de los lados para que una figura sea un cuadrado? ¿Qué propiedad adicional habría que comprobar?

- **Actividad con GeoGebra 4: La familia de los rombos: de una forma fija a una propiedad invariante.**

Objetivo: Identificar el rombo como una familia de cuadriláteros con cuatro lados iguales y no como una única forma prototípica.

Idea didáctica: Continuar el desplazamiento desde la apariencia hacia las propiedades, evitando ahora un nuevo prototipo: el del “rombo de 60° y 120° ” que se obtiene cuando el lado coincide con la diagonal. Mostrar que basta con introducir un grado de libertad adicional (la longitud del lado, independiente de la diagonal) para acceder a la familia completa de rombos, desde los muy achatados hasta los casi cuadrados, todos sostenidos por la misma propiedad: cuatro lados iguales.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Punto**, ubicar dos puntos **A** y **C** en la vista gráfica.
2. Con la herramienta **Segmento**, trazar el segmento **$\overline{AC}$** .
3. Con la herramienta **Deslizador**, crear un deslizador numérico **r** (por ejemplo, con valores de 1 a 10 y paso 0,1). Este valor controlará la longitud de los lados del rombo, de forma independiente del segmento **$\overline{AC}$** .
4. Con la herramienta **Circunferencia (centro y radio)**, trazar una circunferencia con centro en **A** y radio **r**, y otra segunda circunferencia con centro en **C** y radio también **r**.



5. Con la herramienta **Intersección**, marcar los dos puntos donde se intersecan las circunferencias. Nombrarlos, por ejemplo, **B** y **D**.
6. Con la herramienta **Polígono**, unir los puntos en este orden: **A, B, C, D**, y cerrar nuevamente en **A**. Así se obtiene un rombo en el que $\overline{AC}$ es una de las diagonales y los cuatro lados miden **r**.
7. Con la herramienta **Distancia o Longitud**, mostrar la medida de sus cuatro lados.
8. Si se considera pertinente, usar también la herramienta **Ángulo** para mostrar los ángulos interiores, o la herramienta **Segmento** para trazar las diagonales.
9. Con la herramienta **Mover**, arrastrar el deslizador **r** para variar la longitud del lado y arrastrar **A** o **C** para modificar la diagonal. Observar cómo el rombo cambia de forma sin perder la igualdad de sus cuatro lados (Figura 7.4).

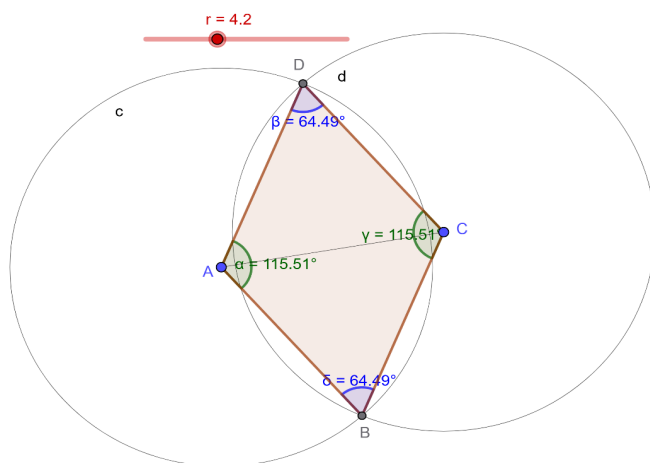


Figura 7.4. Rombo dinámico de radio variable: distintas formas, una única definición.

Preguntas para la reflexión:

- a) Observación:** ¿Qué ocurre cuando se mueve el deslizador **r**? ¿Y cuándo se arrastran los puntos **A** o



C? ¿En qué casos la figura “desaparece” y vuelve a formarse? ¿Qué tan distintos pueden llegar a ser los rombos obtenidos sin que dejen de ser rombos?

b) Comprensión: ¿Qué propiedad geométrica garantiza que los cuatro lados sigan siendo iguales para cualquier valor de r ? ¿Por qué es necesario que r sea mayor que la mitad de $\overline{AC}$ para que el rombo exista? ¿Qué papel juega el deslizador respecto a las condiciones de la construcción?

c) Conjetura: ¿Existe algún valor de r para el cual el rombo se convierta en un cuadrado? ¿Cómo lo justificarías a partir de las propiedades de las diagonales? Si no se controla r y se deja igual a $\overline{AC}$ (como en la actividad anterior), ¿qué tipo particular de rombo se obtiene siempre? ¿Qué nos dice esto sobre la diferencia entre construir un rombo y construir cualquier rombo?

Nota. Al independizar la longitud del lado de la longitud de la diagonal, la construcción deja de producir un único tipo de rombo y abre el acceso a toda la familia. Esto refuerza una idea central de las actividades previas: una figura geométrica no se define por una forma específica, sino por las relaciones que la determinan. El cuadrado, por ejemplo, aparece aquí como un caso particular dentro de la familia de los rombos.

• Actividad con GeoGebra 5: El cuadrilátero de puntos medios.

Objetivo: Formular la conjetura de que al unir los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero se forma un paralelogramo.

Idea didáctica: Promover la observación de una regularidad geométrica y favorecer el paso desde la exploración dinámica hacia una conjetura más general. En esta actividad interesa que el estudiante advierta que, aun cuando el cuadrilátero inicial cambie de forma, la figura interior conserva una propiedad estable.



Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Punto**, ubicar cuatro puntos no alineados **A**, **B**, **C** y **D** en la vista gráfica (que no estén alineados ni formen un cuadrilátero cruzado).
2. Con la herramienta **Polígono**, unir los puntos **A**, **B**, **C** y **D** para formar un cuadrilátero cualquiera.
3. Con la herramienta **Punto medio o centro**, marcar el punto medio de cada lado del cuadrilátero: **E** en , **F** en , **G** en , **H** en .
4. Con la herramienta **Polígono**, unir los puntos **E**, **F**, **G** y **H** para formar el cuadrilátero interior.
5. Con la herramienta **Segmento**, trazar las diagonales y del cuadrilátero original.
6. Con la herramienta **Distancia o Longitud**, medir las longitudes de los lados del cuadrilátero **EFGH** y las longitudes de las diagonales y , para poder compararlas. Con la herramienta **Ángulo**, medir además los ángulos interiores de **EFGH**.
7. Con la herramienta **Mover**, arrastrar los vértices del cuadrilátero inicial y observar qué ocurre con la figura formada por los puntos medios (Figura 7.5).

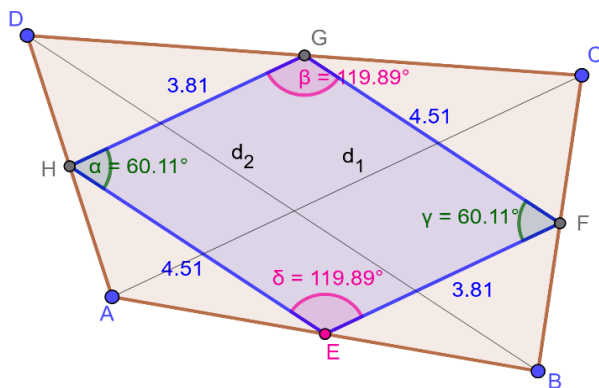


Figura 7.5. El paralelogramo de Varignon: una propiedad estable bajo deformaciones del cuadrilátero original.



Nota. El cuadrilátero EFGH formado por los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero ABCD es siempre un paralelogramo, conocido como paralelogramo de Varignon. Sus lados son paralelos a las diagonales de ABCD y miden la mitad de cada una. Esta propiedad se mantiene, aunque ABCD sea convexo, no convexo o incluso cruzado, lo cual la convierte en un ejemplo notable de invariante geométrico, el carácter de paralelogramo de EFGH no depende de la forma específica de ABCD, sino solamente de que se tomen los puntos medios de sus lados.

Preguntas para la reflexión:

- a) Observación:** ¿Qué tipo de figura parece formarse al unir los puntos medios? ¿Cambia esa figura al arrastrar los vértices A, B, C o D? ¿Qué se conserva y qué cambia?
- b) Comprensión:** ¿Cómo se relacionan los lados del cuadrilátero EFGH con las diagonales del cuadrilátero ABCD? ¿Qué pasa con sus longitudes? ¿Y con sus direcciones? ¿Qué tipo de cuadrilátero es siempre EFGH?
- c) Conjetura:** ¿Puedes formular una afirmación general sobre el cuadrilátero formado por los puntos medios de cualquier cuadrilátero? ¿Sigue siendo válida si ABCD es no convexo? ¿Y si es cruzado? ¿Qué propiedad del cuadrilátero original deja de ser relevante para que la propiedad del interior se mantenga?

Síntesis del apartado

Las actividades de este apartado promueven el desplazamiento desde un razonamiento apoyado en la apariencia de las figuras hacia uno sustentado en sus propiedades. Los estudiantes confrontan la idea de que la orientación, el tamaño o la posición de una figura no forman parte de su definición, comparan propiedades de distintos cuadriláteros y, sobre todo, descubren la



diferencia entre dibujar una figura y construirla bajo condiciones geométricas, distinción que la prueba del arrastre hace visible. La actividad de cierre, centrada en el paralelogramo de Varignon, muestra además que ciertas propiedades permanecen invariantes aun cuando la figura de partida se deforme, preparando así el terreno para el trabajo posterior con relaciones de inclusión entre clases y con la generalización hacia los polígonos.

7.3. Clasificación jerárquica y generalización a los polígonos

Una vez consolidada la lectura por propiedades trabajada en el apartado anterior, este apartado se ocupa de explotar ese trabajo para construir relaciones de inclusión entre clases de cuadriláteros y, finalmente, para generalizar el razonamiento hacia los polígonos de n lados. Se pretende ampliar la mirada hacia propiedades más generales —como la suma de los ángulos interiores o las jerarquías entre familias de figuras—, de modo que el trabajo geométrico avance desde el reconocimiento individual de cuadriláteros hacia la formulación de regularidades y la organización conceptual de las clases.

GeoGebra continúa operando como herramienta de mediación didáctica, ahora especialmente útil para visualizar transiciones entre clases —cómo un rectángulo se convierte en cuadrado al igualar base y altura, o un paralelogramo en rectángulo al imponer un ángulo recto— y para verificar regularidades válidas en familias completas de polígonos. Las actividades buscan que los estudiantes deslicen progresivamente su pensamiento desde una clasificación rígida y fragmentada de las figuras hacia una comprensión jerárquica e inclusiva, en la que cada figura se entiende como caso particular de clases más generales (Duval, 2006; Fujita y Jones, 2007; Laborde, 2000).



- **Actividad con GeoGebra 1: La inclusión entre cuadriláteros.**

Objetivo: Construir un mapa de inclusión entre cuadriláteros a partir de sus propiedades.

Idea didáctica: Superar una clasificación rígida y fragmentada de los cuadriláteros, mostrando relaciones de inclusión entre figuras a partir de sus definiciones y propiedades. La actividad busca que el estudiante deje de ver los cuadriláteros como una lista de nombres separados y empiece a comprenderlos como una red de clases relacionadas.

Construcción sugerida en GeoGebra:

A) Construcción de las figuras a comparar

1. En la vista gráfica, construir o recuperar las siguientes figuras en zonas separadas: un paralelogramo, un rectángulo, un rombo y un cuadrado. Si se desea ampliar la comparación, añadir también un trapecio y un trapecoide.
2. Procurar que cada figura quede construida a partir de sus propiedades geométricas y no solo dibujada a simple vista. Por ejemplo, el rectángulo, a partir de perpendicularidad y paralelismo; el rombo, a partir de la igualdad de sus cuatro lados; el cuadrado, a partir de la combinación de cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos.

B) Hacer visibles las propiedades

3. Con la herramienta **Distancia o Longitud**, mostrar la medida de algunos lados de cada figura.
4. Con la herramienta **Ángulo**, marcar algunos ángulos interiores.
5. Si se considera pertinente, con la herramienta **Segmento** trazar las diagonales de cada figura.
6. Con la herramienta **Distancia o Longitud**, medir las diagonales cuando se quiera comparar si tienen la



misma longitud, se intersecan en su punto medio o parecen ser perpendiculares.

C) Explorar la variación

7. Con la herramienta Mover, arrastrar los puntos de control de cada figura cuando sea posible:
 - Observar que, aunque la figura cambie de tamaño, posición u orientación, debe conservar las propiedades con las que fue construida.
 - Si alguna figura se desarma, detenerse en ese caso y discutir si realmente fue construida por propiedades o solo dibujada por apariencia.

D) Registrar y comparar

8. Elaborar una tabla comparativa con columnas como estas:
 - Tiene lados opuestos paralelos.
 - Tiene cuatro lados iguales.
 - Tiene cuatro ángulos rectos.
 - Sus diagonales son congruentes.
 - Sus diagonales son perpendiculares.
 - Sus diagonales se bisecan.
9. Completar la tabla a partir de lo observado en la pantalla y no solo por memoria o definición verbal.

E) Construir el mapa de inclusión

10. Una vez completada la tabla, pedir a los estudiantes que organicen un mapa de inclusión entre las figuras.
11. Para ello, pueden usar flechas, diagramas de conjuntos, llaves, o un esquema jerárquico. El objetivo es mostrar qué clases de cuadriláteros contienen a otras según las propiedades que cumplen.
12. Revisar colectivamente afirmaciones como estas:
 - Todo cuadrado es un rectángulo.



- Todo cuadrado es un rombo.
- Todo rectángulo es un paralelogramo.
- Todo rombo es un paralelogramo.

Hay que significar que la actividad no termina al completar la tabla. El momento más importante llega cuando los estudiantes deben decidir cómo organizar las figuras en un sistema de relaciones y no como una lista de nombres separados. Ahí aparece el verdadero valor de la actividad: pasar de la clasificación rígida a una comprensión jerárquica de los cuadriláteros (Figura 7.6).

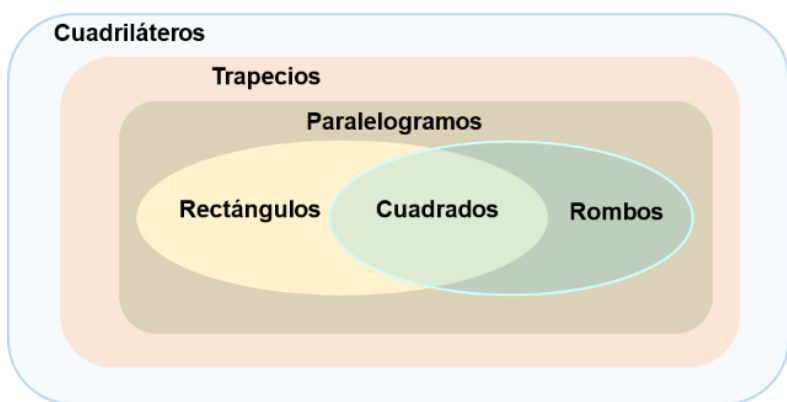


Figura 7.6. Diagrama de inclusión jerárquica entre las clases de cuadriláteros: el cuadrado como intersección de rectángulos y rombos.

Preguntas para la reflexión:

- Observación:** ¿Qué propiedades comparten algunas de las figuras de la actividad? ¿Qué figuras cumplen simultáneamente varias condiciones? ¿Qué relaciones de inclusión empiezan a aparecer al comparar sus propiedades?
- Comprensión:** ¿Por qué el cuadrado puede considerarse un caso particular de rectángulo? ¿Por qué el cuadrado puede considerarse también un caso particular de rombo? ¿Qué cambia cuando



pensamos las clases de figuras de forma jerárquica y no como listas separadas?

c) Conjetura: ¿Qué definiciones conviene usar para que la clasificación resulte más potente? ¿Qué afirmaciones puedes sostener a partir de las propiedades ya comparadas? ¿Qué relaciones entre cuadriláteros podrían justificarse usando el mapa construido?

• **Actividad con GeoGebra 2: Del rectángulo al cuadrado.**

Objetivo: Verificar que el cuadrado es un caso particular del rectángulo cuando sus lados tienen la misma medida, es decir, cuando la razón entre base y altura es:

Idea Didáctica: El núcleo de esta actividad es romper la concepción errónea de que el cuadrado y el rectángulo son figuras disjuntas. Al manipular b y h , el estudiante descubre que el cuadrado no es “otra cosa”, sino un estado específico de equilibrio del rectángulo.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Crear dos deslizadores:

b: base, con valores de **1** a **10**.

h: altura, con valores de **1** a **10**.

2. Con la herramienta **Segmento de longitud dada**, trazar un segmento $\overline{AB}$ de longitud **b**.

3. Con la herramienta **Perpendicular**, trazar rectas perpendiculares a $\overline{AB}$ por los puntos **A** y **B**.

4. Con la herramienta **Circunferencia (centro y radio)** trazar una circunferencia con centro **A** y radio **h**.

5. Con la herramienta **Intersección**, hacer clic sobre esa circunferencia y sobre la perpendicular trazada por A, GeoGebra crea dos puntos de corte, tomar cualquiera y renombrarlo como **D**.



6. Con la herramienta **Circunferencia (centro y radio)** trazar una circunferencia con centro **B** y radio **h**.
7. Con la herramienta **Intersección**, hacer clic sobre esa circunferencia y sobre la perpendicular trazada por B, GeoGebra crea dos puntos de corte, elegir el que queda del mismo lado de $\overline{AB}$ que **D**.
8. Con la herramienta **Polígono**, unir **A, B, C, D** para formar el rectángulo.
9. Pedir al estudiante que mueva los deslizadores **b** y **h** de forma independiente y observar el momento en que la figura parece un cuadrado (Figura 7.7). Luego verificar si realmente se cumple: **b=h** o equivalentemente $\frac{b}{h} = 1$

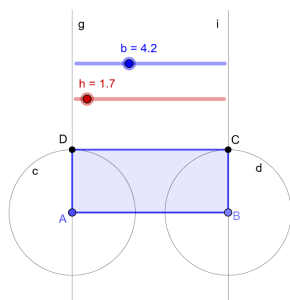


Figura 7.7. Construcción dinámica del rectángulo: la igualdad entre base y altura como condición que lo convierte en cuadrado.

Preguntas para la reflexión:

- a) **Observación:** Si fijamos **h=5** y movemos **b**, ¿en qué momento exacto el rectángulo se convierte en cuadrado?
- b) **Comprensión:** ¿Qué propiedad del rectángulo se mantiene siempre? ¿Qué propiedad adicional aparece cuando el rectángulo se convierte en cuadrado?
- c) **Conjetura:** ¿Es correcto decir que todo cuadrado es un rectángulo? ¿Qué muestran los deslizadores sobre esta relación?





• Actividad con GeoGebra 3: El romboide y el rectángulo.

Objetivo: Identificar al rectángulo como un caso particular de paralelogramo cuando uno de sus ángulos es recto.

Idea Didáctica: Continuar la línea de inclusión entre clases de cuadriláteros: mostrar que el paralelogramo es la figura más general, y que el rectángulo ($\alpha = 90^\circ$) emerge como subclase al imponer una condición adicional. Reforzar la noción de que las clases de cuadriláteros se relacionan por propiedades, no por apariencia.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Crear tres deslizadores:

a: ángulo de inclinación, con valores entre 0° y 180° (estrictamente, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, para evitar figuras degeneradas cuando $\alpha = 0^\circ$ o $\alpha = 180^\circ$, **b:** longitud de la base, **c:** longitud del lado inclinado.
2. Con la herramienta **Segmento de longitud dada**, trazar el segmento $\overline{AB}$ de longitud **b**.
3. Con la herramienta **Ángulo de amplitud** dada, hacer clic primero en **B** y luego en **A**, y en el cuadro que aparece escribir **a** (sentido antihorario). Esto crea un nuevo punto **B'**, que es la rotación de **B** alrededor de **A** por el ángulo **a**.
4. Con la herramienta **Semirrecta**, trazar la semirrecta que parte de **A** y pasa por **B'**. Esta es la semirrecta que forma un ángulo **a** con $\overline{AB}$.
5. Con la herramienta **Circunferencia (centro y radio)**, trazar una circunferencia con centro en **A** y radio **c**. Con la herramienta **Intersección**, marcar el punto donde esa circunferencia interseca a la semirrecta del paso anterior y nombrarlo **D**. De este modo $\overline{AD} = c$.
6. Con la herramienta **Recta paralela**, trazar por **B** una recta paralela a $\overline{AD}$.

7. Con la herramienta **Recta paralela**, trazar por **D** una recta paralela a $\overline{AB}$.
8. Con la herramienta **Intersección**, marcar la intersección de esas dos rectas como **C**.
9. Con la herramienta **Polígono**, unir **A**, **B**, **C** y **D** para formar el paralelogramo **ABCD**.
10. Variar el deslizador a manteniendo **b** y **c** fijos, y observar cómo cambia la forma del paralelogramo. Identificar el valor de **a** para el cual la figura se convierte en un rectángulo (Figura 7.8). Repetir variando **a** y **b**: ¿el valor de **a** al que aparece el rectángulo cambia o se mantiene?

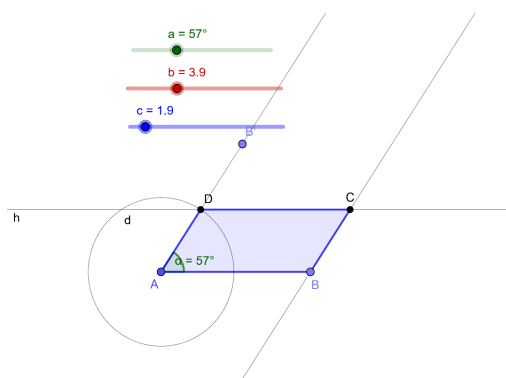


Figura 7.8. El rectángulo como caso particular del paralelogramo: misma construcción, una condición adicional sobre el ángulo.

Preguntas para la reflexión

- a) **Observación:** Al mover el deslizador **a** manteniendo **b** y **c** fijos, ¿qué cambia y qué permanece constante en el paralelogramo? ¿Cómo se modifican los ángulos interiores? ¿Y las longitudes de los lados?
- b) **Comprensión:** Cuando $a = 90^\circ$, la figura se llama rectángulo. ¿Sigue siendo un paralelogramo? ¿Por qué? ¿Qué propiedades del paralelogramo se siguen cumpliendo y qué propiedad nueva aparece al imponer $a = 90^\circ$?
- c) **Conjetura:** ¿Qué sucede con las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ y a medida que **a** se acerca a 90° ? Activar la medida



de ambas diagonales y observar qué ocurre con sus longitudes cuando $a = 90^\circ$. ¿Qué propiedad de las diagonales aparece exactamente en ese caso?

- **Actividad con GeoGebra 4: La suma de los ángulos interiores de un polígono.**

Objetivo: Generalizar la fórmula de la suma de los ángulos interiores de un polígono a partir de la relación entre número de lados y triangulación.

Idea didáctica: La idea es que el estudiante no memorice la fórmula, sino que la construya por generalización e inducción. Al observar que cada nuevo lado añade exactamente 180° a la suma de los ángulos interiores, el estudiante intuye la triangulación interna del polígono y reconoce que la propiedad no depende de la regularidad ni de la convexidad, lo que importa es el número de lados. La fórmula es válida para todo polígono simple (sin autointersecciones).

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Crear un deslizador **n**, con valores enteros entre 3 y 12. Este representará el número de lados del polígono.
2. Con la herramienta **Polígono regular**, marcar los puntos **A** y **B** y, en el cuadro de diálogo que solicita el número de vértices, escribir **n**.
3. Con la herramienta **Ángulo**, hacer clic en el interior del polígono: GeoGebra crea automáticamente todos los ángulos interiores (α , β , γ , ...). Como alternativa, puede medirse un ángulo individual seleccionando tres vértices consecutivos (por ejemplo, A, B, C para el ángulo en B).
4. Como el polígono es regular y todos sus ángulos miden lo mismo, basta con tomar uno de ellos, llamarlo **α** , y definir en la Vista Algebraica **Suma = n α** . Definir también **Formula = $(n - 2) 180^\circ$** y comparar ambos valores al mover el deslizador.



- Insertar un Texto dinámico que muestre el número de lados y la suma actual:

Para un polígono de **n** lados, la suma de sus ángulos interiores es **Suma**. Activar la opción de fórmula LaTeX si se desea un formato más limpio.

- Para varios valores de n, con la herramienta **Segmento**, trazar todas las diagonales posibles desde un único vértice, por ejemplo, desde A hacia los vértices no adyacentes.
- Contar cuántos triángulos se forman para cada valor de n y completar una tabla como la siguiente:

Tabla 7.2. Relación entre el número de lados, el número de triángulos y la suma de los ángulos interiores de un polígono.

Número de lados n	3	4	5	6	7	...
Número de triángulos						
Suma de ángulos interiores						

- A partir de la tabla 7.2, orientar la discusión hacia la regularidad observada: un polígono de n lados puede dividirse en (n-2) triángulos. Como cada triángulo tiene 180°, la suma de los ángulos interiores es:

$$S = (n - 2) * 180^\circ$$

- Finalmente, repetir la exploración con polígonos no regulares, contruidos manualmente con la herramienta **Polígono**. Los estudiantes pueden mover los vértices y observar que, aunque cambien la forma y las medidas de los ángulos individuales, la suma total se conserva mientras el número de lados sea el mismo y el polígono no tenga autointersecciones (Figura 7.9).



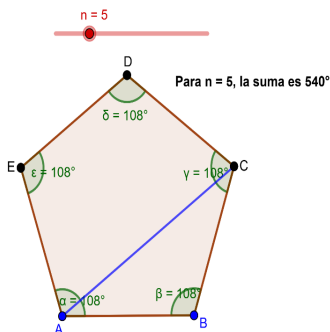


Figura 7.9. Suma de los ángulos interiores de un pentágono regular en GeoGebra.

Al mover el deslizador **n**, cambia el número de lados del polígono y se actualiza automáticamente la suma de sus ángulos interiores. En el caso mostrado, para $n=5$, cada ángulo interior mide 108° , por lo que la suma total es 540° .

Preguntas para la reflexión:

a) Observación: Completa la tabla del paso 7 para $n = 3, 4, 5, 6, 7$. ¿Qué relación numérica encuentras entre el número de lados del polígono y el número de triángulos que se forman al trazar diagonales desde un solo vértice?

b) Comprensión: Si cada triángulo aporta 180° a la suma de los ángulos interiores, ¿por qué un cuadrilátero suma 360° y un pentágono 540° ? Explica el razonamiento usando la triangulación, no la fórmula.

c) Conjetura:

- Si un polígono de n lados se descompone en $n-2$ triángulos, ¿cuál es la expresión general para calcular la suma de sus ángulos interiores? Compárala con la variable **Formula** de la construcción.
- Mueve los vértices del polígono irregular, sin cambiar n y sin cruzar los lados. Incluso puedes probar convertirlo en un polígono cóncavo. ¿Cambia la suma de los ángulos interiores? ¿Qué propiedades



dependen de la forma del polígono y cuáles dependen solo del número de lados?

- Para un polígono regular, deduce la medida de un ángulo interior individual: . ¿A qué valor se acerca esta expresión cuando n crece mucho? ¿A qué figura empieza a parecerse el polígono regular?

Síntesis del apartado

Las actividades de este apartado consolidan una mirada jerárquica sobre los cuadriláteros, en la que cada figura se comprende como un caso particular de clases más generales, y extienden este modo de razonar hacia los polígonos de n lados. Los estudiantes construyen un mapa de inclusión entre clases, visualizan cómo una condición adicional sobre los lados o sobre los ángulos transforma una figura en otra el rectángulo en cuadrado, el paralelogramo en rectángulo y, en la actividad de cierre, generalizan por inducción la fórmula de la suma de los ángulos interiores, reconociendo que esta propiedad depende únicamente del número de lados. De este modo, el razonamiento geométrico se desplaza desde la clasificación rígida hacia la organización conceptual de las figuras como sistemas de relaciones, sentando las bases para el tratamiento posterior de los polígonos regulares, la circunferencia y las transformaciones del plano.

El estudio de los cuadriláteros constituye un caso paradigmático para comprender las dificultades propias del aprendizaje de la geometría: la dependencia de los prototipos visuales, la resistencia a aceptar clasificaciones jerárquicas y la necesidad de fundamentar el razonamiento en propiedades antes que en apariencias. La primera parte del capítulo estableció este marco conceptual, mostrando que la enseñanza debe trascender el reconocimiento y nombrado de figuras para avanzar hacia el análisis de propiedades, la discusión de definiciones y el uso sistemático de contraejemplos. La segunda parte tradujo estos principios en una secuencia didáctica mediada por





GeoGebra, en la que cada construcción opera como dispositivo para distinguir entre lo que constituye una propiedad geométrica y lo que es un rasgo accidental de la representación.

El núcleo pedagógico del capítulo reside en la distinción entre dibujo y construcción geométrica, validada mediante la prueba del arrastre: una figura no se define por su apariencia, sino por las relaciones que la sostienen. De este principio se derivan los aprendizajes desarrollados a lo largo del recorrido: la clasificación inclusiva de los cuadriláteros, el reconocimiento de invariantes geométricos y la generalización inductiva hacia los polígonos de n lados. En conjunto, el capítulo propone un cambio en la mirada sobre las figuras geométricas, que deja de concebirlas como nombres asociados a imágenes para pensarlas como sistemas de relaciones susceptibles de ser analizados, comparados y generalizados. Esta perspectiva, ejercitada en el contexto particular de los cuadriláteros, sienta las bases conceptuales para el tratamiento posterior de los polígonos regulares, la circunferencia y las transformaciones del plano.

Preguntas para la reflexión docente

Las preguntas que siguen no esperan respuestas únicas ni inmediatas. Su propósito es ofrecer un espacio de revisión sostenida sobre la propia práctica, ya sea en el ejercicio individual, en una bitácora reflexiva o en el diálogo con colegas. Conviene volver a ellas en distintos momentos del año escolar y contrastar lo que se piensa con lo que efectivamente ocurre en el aula.

Sobre los prototipos visuales

1. ¿Qué imágenes utilizo habitualmente al presentar cuadriláteros? ¿Tiendo a mostrarlos siempre en su orientación canónica (el cuadrado con lados horizontales, el rombo «apoyado en una punta», el rectángulo apaisado)?

2. ¿Cómo reaccionan mis estudiantes cuando les presento una figura en orientación poco habitual o un cuadrilátero no convexo, como una flecha o una estrella?

Sobre las definiciones y los contraejemplos

3. ¿Introduzco las definiciones geométricas como puntos de partida cerrados o como objetos que pueden discutirse y refinarse mediante contraejemplos?
4. ¿He conversado con mis estudiantes sobre el hecho de que la definición de una figura, como la del trapecio, es una convención que admite alternativas inclusivas y exclusivas?

Sobre la inclusión jerárquica entre clases

5. ¿Qué hago cuando un estudiante afirma que «un cuadrado no es un rectángulo»? ¿Lo corrijo de inmediato o lo aprovecho como punto de entrada para discutir relaciones de inclusión?
6. ¿Mis estudiantes pueden explicar por qué todo cuadrado es a la vez rectángulo y rombo, o esa afirmación les resulta contradictoria?

Sobre el dibujo y la construcción geométrica

7. ¿Mis estudiantes distinguen entre dibujar una figura y construirla bajo condiciones geométricas precisas? ¿Qué actividades favorecen esa distinción?
8. Cuando una construcción “se desarma” al ser arrastrada, ¿lo aprovecho como ocasión de aprendizaje o lo trato como un error técnico que debe corregirse?

Sobre GeoGebra y la interacción en el aula

9. ¿Empleo GeoGebra como herramienta de exploración formulación de conjeturas o solo como soporte visual que reemplaza al pizarrón?
10. ¿Quién manipula las construcciones y valida las conjeturas en mi clase: yo, los estudiantes, el grupo, ¿o la propia figura al ser sometida al arrastre?

Sobre la generalización y la evaluación

11. ¿Construyo las fórmulas y propiedades junto con mis estudiantes a partir de la exploración, o las presento ya elaboradas para que sean aplicadas?
12. ¿Qué evidencias recojo del aprendizaje geométrico de mis estudiantes? ¿Mis instrumentos de evaluación valoran solo el reconocimiento de figuras o también la argumentación, la formulación de conjeturas y la comprensión de relaciones?



[illegible]

8.1. Circunferencia y círculo

Simple, porque se define con una sola condición, la



equidistancia a un centro. Rica, porque de esa única condición se desprende una variedad asombrosa de propiedades. Entre ellas aparecen el número π como razón constante entre longitud y diámetro, las relaciones entre ángulos centrales e inscritos y el teorema de Tales sobre la circunferencia. También surgen las posiciones relativas entre rectas y curvas, así como la conexión con los polígonos regulares, que la rodean y la aproximan sin alcanzarla nunca por completo. Pocas figuras condensan tanto contenido geométrico a partir de tan poco.

Didácticamente, el capítulo plantea desafíos específicos. El más visible es la confusión entre circunferencia y círculo, que la enseñanza escolar muchas veces alimenta con un vocabulario impreciso, tratando a ambos como sinónimos o usando uno por otro sin advertir la diferencia entre la curva y la región. El más profundo, sin embargo, es la dificultad para pensar la circunferencia como un lugar geométrico, esto es, como un conjunto de puntos definidos por una propiedad, y no como un dibujo redondo. Es esta segunda dificultad la que el capítulo aborda con mayor insistencia: el primer apartado conceptual y la primera actividad de la secuencia están dedicados precisamente a transitar del dibujo al lugar geométrico, del reconocimiento visual a la propiedad que lo sostiene.

El recorrido del capítulo está organizado en torno a dos secuencias con GeoGebra. La primera introduce la circunferencia como lugar geométrico, distingue circunferencia y círculo, y desarrolla el vocabulario operativo que estructura el trabajo posterior: cuerda, diámetro, arco, secante y tangente. La segunda se concentra en las relaciones que se sostienen sobre esa estructura: la razón constante π , los ángulos central e inscrito, el teorema de Tales sobre la circunferencia, los polígonos inscritos y circunscritos, y las longitudes y áreas asociadas a porciones de la figura. El capítulo cierra con una síntesis y un conjunto de preguntas para

la reflexión docente, en consonancia con la estructura de los capítulos anteriores.

GeoGebra cumple aquí un papel particularmente decisivo. La circunferencia, más que cualquier otra figura tratada hasta ahora, es un objeto que se entiende mejor cuando se ve cambiar conservando lo que la define. Al variar el radio con un deslizador, al desplazar un punto sobre la curva, al inscribir polígonos de número creciente de lados, el entorno dinámico hace tangible lo que en el dibujo estático queda oculto: que la equidistancia, la razón π y las relaciones angulares no son fórmulas que haya que recordar, sino regularidades que pueden observarse, explorarse y, finalmente, justificarse. En este sentido, el capítulo 8 culmina la propuesta didáctica de la Parte III al mostrar que la geometría, incluso en sus contenidos más clásicos y aparentemente cerrados, sigue siendo un campo abierto a la exploración cuando las mediaciones pedagógicas lo permiten.

La circunferencia y el círculo suelen confundirse en la enseñanza escolar porque ambos se asocian visualmente con una figura “redonda”. Desde el punto de vista geométrico, sin embargo, representan objetos distintos: la circunferencia es el conjunto de todos los puntos del plano que se encuentran a una misma distancia de un punto fijo llamado centro, mientras que el círculo es la región interior limitada por esa circunferencia. La distinción no es solo terminológica. Hablar de circunferencia es hablar de una curva, esto es, de una figura unidimensional en la que tiene sentido medir longitud, pero no área; hablar de círculo es hablar de una región plana, esto es, de una superficie en la que tiene sentido medir el área, pero no la longitud, salvo la de su borde. Por eso, las preguntas que pueden formularse sobre cada uno de ellos son también distintas, y el trabajo didáctico no debería centrarse únicamente en reconocer la forma, sino en comprender las propiedades que la definen.





Esta confusión inicial tiene consecuencias más sutiles de lo que parece. Es habitual encontrar estudiantes que calculan correctamente el área del círculo aplicando la fórmula πr^2 pero que, ante la pregunta ¿cuánto mide el área de la circunferencia?, responden con el mismo cálculo, sin advertir que la circunferencia, al ser una curva, tiene longitud, pero no área. También es frecuente que, ante la pregunta ¿en qué se diferencia una circunferencia de una elipse?, recurran a respuestas perceptuales la elipse está aplastada, la circunferencia es más regular sin apelar a la propiedad de equidistancia que distingue a una de la otra. Estas respuestas revelan que la figura está siendo pensada como un dibujo redondo y no como un lugar geométrico, es decir, como un conjunto de puntos que cumple una condición precisa (Duval, 2006).

La investigación en didáctica de la geometría ha identificado obstáculos específicos asociados a estos objetos. Uno de los más frecuentes es la confusión léxica y conceptual entre circunferencia y círculo, que en muchos casos lleva a tratarlos como sinónimos o a usar uno por otro sin distinguir entre la curva y la región. A esto se suma la tendencia a memorizar fórmulas sin reconocer su sentido geométrico: π aparece como un número decimal que hay que aprender, y no como una razón constante entre la longitud de cualquier circunferencia y su diámetro. Finalmente, las relaciones entre ángulos centrales, ángulos inscritos y arcos tienden a aprenderse como reglas aisladas, sin conexión con la propiedad de equidistancia que las hace posibles (Gutiérrez y Jaime, 2015).

Conviene también explicitar una convención léxica que el docente debe manejar con cuidado. En el lenguaje cotidiano, e incluso en algunos textos escolares, la palabra círculo se usa de manera ambigua. A veces, se utiliza para designar la región plana, a veces, informalmente, la curva que la delimita, y a veces se aplica a ambos sin distinción. En matemáticas, la convención más extendida reserva circunferencia para

la curva y círculo para la región, aunque persisten variantes acerca de si esa región incluye o no la frontera. Esta ambigüedad recuerda la discusión del capítulo anterior sobre la definición del trapecio: igual que ocurre con las definiciones inclusivas y exclusivas, lo importante no es debatir cuál convención es la correcta, sino que el docente explicita la que usará en clase y se mantenga coherente con ella. La falta de esta explicitación es, en buena medida, la raíz de la confusión léxica que la propia didáctica diagnostica.

Una vez establecida la distinción, la circunferencia despliega un vocabulario propio que conviene introducir desde el inicio porque estructura buena parte del trabajo posterior. Más allá del centro y el radio, una circunferencia tiene cuerdas (segmentos que unen dos de sus puntos), diámetros (cuerdas que pasan por el centro y son las más largas posibles), arcos (porciones de la curva limitada por dos puntos), secantes (rectas que la intersecan en dos puntos) y tangentes (rectas que la tocan en un único punto). En el terreno del círculo aparecen además los sectores circulares (regiones limitadas por dos radios y un arco) y los segmentos circulares (regiones limitadas por una cuerda y un arco). Cada uno de estos elementos no es un detalle de terminología matemática, sino una herramienta conceptual. Así, hablar de cuerda permite formular el hecho de que la perpendicular trazada desde el centro la interseca en su punto medio; hablar de tangente permite enunciar que es perpendicular al radio en el punto de tangencia; hablar de arco permite traducir un ángulo central en una porción medible de la circunferencia.

Pensada como lugar geométrico, la circunferencia se inscribe en una progresión conceptual que el estudiante ya ha recorrido en parte. En el capítulo 5 se introdujeron dos lugares geométricos elementales: la mediatriz, como conjunto de puntos equidistantes a dos puntos dados, y la bisectriz, como conjunto de puntos equidistantes a dos rectas dadas. La circunferencia





se suma a esa familia con una definición de la misma naturaleza: el conjunto de puntos equidistantes a un único punto fijo. Esta continuidad merece ser explicitada en el aula, porque permite que el estudiante perciba la geometría como un sistema en el que ciertas ideas, en este caso, la equidistancia, se reaplican a distintos contextos para producir objetos cada vez más ricos. La novedad respecto a las actividades del capítulo 5 es que el lugar geométrico no es ahora una recta sino una curva cerrada, lo que abre un repertorio nuevo de relaciones y propiedades.

Igualmente, significativo es el vínculo entre la circunferencia y los polígonos trabajados en el capítulo 6. Un polígono regular puede inscribirse en una circunferencia haciendo coincidir sus vértices con puntos equidistantes de un centro; recíprocamente, una circunferencia puede entenderse como el caso límite al que tienden los polígonos regulares cuando el número de lados crece indefinidamente. Esta idea, latente ya en la última actividad del capítulo 7 cuando se pregunta a qué figura se aproxima un polígono regular cuando n crece mucho, encuentra aquí su contraparte natural y prepara, sin necesidad de formalizarlo, el pensamiento de límite que será fundamental en los capítulos posteriores. La circunferencia aparece, como puente entre lo discreto y lo continuo, entre los polígonos y las curvas.

El uso de GeoGebra resulta especialmente valioso para abordar todos estos aspectos. Al permitir construir, mover y medir objetos de manera dinámica, hace visible aquello que un dibujo estático no puede mostrar: que ciertas relaciones se conservan al cambiar el tamaño de la figura. Mediante deslizadores, rastros y mediciones, el estudiante puede observar que la equidistancia al centro se mantiene punto a punto, que la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro es siempre la misma sin importar el tamaño, y que la relación entre los ángulos centrales e inscritos no depende de las dimensiones de la figura. Lo que en el dibujo estático

era una propiedad anunciada por el docente, en el entorno dinámico se vuelve una regularidad que el estudiante puede explorar y, eventualmente, justificar (Arzarello et al., 2002; Laborde, 2000).

Síntesis del apartado

La enseñanza de la circunferencia y el círculo exige distinguir con precisión entre la curva y la región que delimita, comprender ambas como objetos definidos por propiedades de equidistancia y no por su apariencia redonda, e introducir el vocabulario de los elementos (cuerda, diámetro, arco, secante, tangente, sector, segmento) como herramientas conceptuales y no como meras etiquetas. El apartado se apoya en una doble continuidad. Por una parte, una continuidad conceptual con los lugares geométricos elementales como la mediatriz y bisectriz tratados en el capítulo 5, donde se introduce la idea de equidistancia. Por la otra, una continuidad temática con los polígonos regulares del capítulo 6, de los que la circunferencia constituye el caso límite. La mediación de GeoGebra permite hacer visibles la equidistancia, la invariancia de la razón π y la estabilidad de las relaciones angulares, transformando las propiedades de la circunferencia en regularidades que el estudiante puede explorar, conjeturar y argumentar.

8.2. La circunferencia y sus elementos: una secuencia con GeoGebra

La intencionalidad didáctica de este apartado es que el estudiante comprenda la circunferencia y el círculo desde sus propiedades geométricas, y no solo como figuras “redondas”. Se busca reconocer la circunferencia como el conjunto de puntos que están a la misma distancia de un centro, y el círculo como la región formada por los puntos cuya distancia al centro es menor o igual que el radio.

Mediante el uso de GeoGebra, deslizadores, rastros y mediciones, el estudiante observa propiedades



invariantes como la equidistancia al centro, la razón constante y la relación entre ángulo central e inscrito. Así, pasa de la observación visual a la formulación de conjeturas y explicaciones geométricas.

- **Actividad con GeoGebra 1: La circunferencia como lugar geométrico.**

Objetivo: Identificar la circunferencia como el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un centro.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Crear un deslizador tipo **Número r** , con valores de 1 a 10.
2. Con la herramienta **Punto**, ubicar un punto y renombrar como **O**, que será el centro de la circunferencia.
3. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio**, construir una circunferencia de centro **O** y radio **r** .
4. Con la herramienta **Punto en objeto**, ubicar un punto **A** sobre la circunferencia.
5. Con la herramienta **Segmento**, unir el punto **O** y con el punto **A**.
6. Activar el **Rastro** del punto **A** (clic derecho sobre el punto -> Mostrar rastro).
7. Activar **Animación** del punto **A** (clic derecho sobre el punto -> Animación o presionar el botón de “Play” en la Vista Algebraica).
8. Observar cómo el rastro va dibujando la circunferencia.
9. En el **Menú Principal**, ir a **Actualiza las Vistas (limpia rastros)** y cambiar el valor del deslizador r y observar cómo cambia el tamaño de la circunferencia (Figura 8.1).



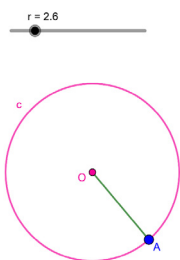


Figura 8.1. Circunferencia como lugar geométrico.

Preguntas para la reflexión:

a) Observación: Al activar la animación, ¿qué ocurre con la longitud del segmento OA mientras el punto A recorre la circunferencia? ¿Qué cambia y qué permanece constante? Si se modifica el valor del deslizador r, ¿cómo se afecta el rastro?

b) Comprensión: Si el rastro dibujado por A constituye la circunferencia, ¿qué propiedad común comparten todos los puntos de ese rastro respecto al centro O? ¿Por qué esa propiedad no es accidental, sino una consecuencia directa del modo en que fue construida la circunferencia?

c) Conjetura: A partir de lo observado, ¿cómo podrías definir la circunferencia sin recurrir a palabras como “redonda” o “curva cerrada”? Formula una definición que utilice únicamente las ideas de centro, distancia y valor fijo.

• **Actividad con GeoGebra 2: Del radio al círculo: la región interior.**

Objetivo: Diferenciar la circunferencia del círculo, reconociendo al círculo como la región interior limitada por la circunferencia.

Idea didáctica: La actividad busca que el estudiante distinga entre la circunferencia como borde y el círculo como región interior. El deslizador permite variar el radio y observar cómo cambia no solo la línea exterior, sino también toda la superficie encerrada por ella.





Al ubicar un punto P en distintas posiciones (dentro, sobre y fuera de la figura) y medir la distancia $|OP|$, el estudiante observa que la pertenencia o no al círculo se traduce en una relación numérica precisa entre esa distancia y el radio. De esta manera, el círculo se interpreta como un conjunto de puntos definido por una desigualdad, en estrecho paralelo con la definición de la circunferencia como conjunto definido por una igualdad, trabajada en la actividad anterior.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Deslizador**, crear un deslizador numérico r con valores de 1 a 10. Este representará el radio.
2. Con la herramienta **Punto**, ubicar un punto y renombrarlo como **O**. Este será el centro.
3. Con la herramienta **Circunferencia (centro y radio)**, trazar una circunferencia con centro en **O** y radio r .
4. **Activar el relleno de la circunferencia** (clic derecho sobre la circunferencia $\rightarrow$ Propiedades $\rightarrow$ Estilo $\rightarrow$ Opacidad del relleno) o usar la opción de color para sombrear la región interior.
5. Con la herramienta **Punto**, ubicar un punto **P** en el plano.
6. Con la herramienta **Distancia o Longitud**, medir la distancia entre **O** y **P**. Esta medida aparecerá en la vista gráfica como $|\overline{OP}|$.
7. Con la herramienta **Mover**, desplazar el punto **P** dentro de la región sombreada y observar que se cumple: $|\overline{OP}| < r$.
8. Con la herramienta **Mover**, ubicar el punto **P** sobre la circunferencia y observar que se cumple: $|\overline{OP}| = r$.
9. Con la herramienta **Mover**, ubicar el punto **P** fuera de la circunferencia y observar que se cumple: $|\overline{OP}| > r$.
10. Con la herramienta **Mover**, variar el deslizador r y observar cómo cambia simultáneamente la línea

exterior (la circunferencia) y la región interior (el círculo) (Figura 8.2).

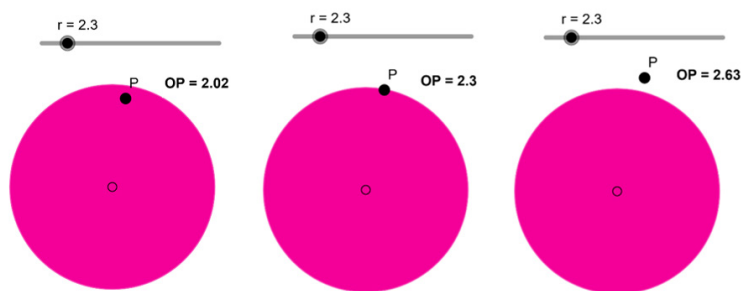


Figura 8.2. Del radio al círculo: tres posiciones del punto P respecto a la circunferencia.

Preguntas para la reflexión

a) Observación: ¿Qué ocurre con la región sombreada cuando aumentamos el valor del radio r ? ¿Y con la circunferencia que la bordea? ¿Qué cambia simultáneamente, y qué relación hay entre la región y su borde?

b) Comprensión: ¿Qué condición cumple un punto P para estar sobre la circunferencia? ¿Y para estar dentro del círculo? ¿Y para estar fuera? ¿Por qué estas tres condiciones se expresan con la misma distancia $|OP|$ pero con relaciones distintas respecto a r ?

c) Conjetura: A partir de lo observado, ¿cómo podrías definir el círculo usando únicamente el centro O , el radio r y la distancia $|OP|$? ¿Qué relación matemática captura la pertenencia al círculo? ¿En qué se diferencia esta definición de la que diste para la circunferencia en la Actividad 1?

• Actividad con GeoGebra 3: Cuerda, secante y tangente: los elementos de la circunferencia.

Objetivo: Construir los elementos lineales fundamentales asociados a una circunferencia (cuerda, secante y tangente) y descubrir, mediante el arrastre, que la tangente puede entenderse como el caso límite





de una secante cuando sus dos puntos de corte se acercan hasta coincidir.

Idea didáctica: Introducir los elementos asociados a la circunferencia (cuerda, secante, tangente) no como definiciones para memorizar, sino como objetos que el estudiante construye y manipula. La idea más significativa de la actividad es mostrar la tangente como caso límite de la secante, una secante interseca a la circunferencia en dos puntos, pero si esos dos puntos se aproximan hasta coincidir, la recta deja de ser secante y pasa a intersectar a la circunferencia en un único punto. Esta intuición prepara, sin necesidad de formalizarla, una de las ideas más importantes del análisis matemático.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Punto**, ubicar un punto y renombrarlo como **O**. Este será el centro.
2. Con la herramienta **Circunferencia (centro y radio)**, construir una circunferencia con centro en **O** y radio **r**.
3. Con la herramienta **Punto** en objeto, marcar dos puntos **A** y **B** sobre la circunferencia.
4. Con la herramienta **Segmento**, trazar el segmento **$\overline{AB}$** . Esta es la cuerda.
5. Con la herramienta **Recta**, trazar la recta que pasa por **A** y **B**. Esta es la secante asociada a la cuerda, y se distingue de ella porque se extiende más allá de los dos puntos de corte.
6. Con la herramienta **Distancia o Longitud**, medir la longitud de la cuerda **$\overline{AB}$** .
7. Construir un caso particular: con la herramienta **Recta**, trazar la recta que pase por **O** y **A**. Con la herramienta **Intersección**, marcar el segundo punto de corte de esa recta con la circunferencia y nombrarlo **A'**. El segmento **$\overline{AA'}$** es un diámetro. Medir su longitud y verificar que coincide con **$2r$** .

8. Con la herramienta **Tangente**, trazar la tangente a la circunferencia que pase por el punto **A**. Esta es la tangente en **A**, que toca a la circunferencia en un único punto.
9. Con la herramienta **Mueve**, arrastrar el punto **B** sobre la circunferencia, acercándolo progresivamente a **A**. Observar cómo cambia la dirección de la secante y cómo se aproxima a la dirección de la tangente (Figura 8.3).

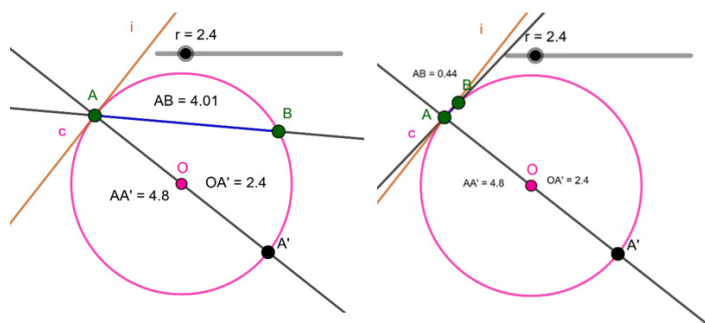


Figura 8.3. Cuerda, secante y tangente: la tangente como caso límite de la secante.

Preguntas para la reflexión:

- a) **Observación:** ¿En cuántos puntos interseca la circunferencia cada uno de los objetos construidos (la cuerda, la recta secante y la recta tangente)? ¿Qué sucede con la longitud de la cuerda al variar la posición de los puntos A y B sobre la circunferencia?
- b) **Comprensión:** ¿Por qué la longitud del diámetro es siempre $2r$? ¿Existe una cuerda más larga que el diámetro? ¿Qué propiedad geométrica de la equidistancia al centro garantiza ese límite?
- c) **Conjetura:** Al acercar el punto B hacia A, ¿qué le ocurre a la secante? ¿En qué momento deja de ser una secante y se convierte en una tangente? ¿Por qué tiene sentido decir que la tangente es un caso límite de la secante?





- **Actividad con GeoGebra 4: La tangente y el radio: una perpendicularidad notable.**

Objetivo: Verificar que el radio trazado al punto de tangencia es perpendicular a la tangente.

Idea didáctica: Apoyándose en la noción de tangente trabajada en la actividad anterior, esta actividad busca que el estudiante descubra, mediante el arrastre, una propiedad notable, el ángulo entre el radio y la tangente, medido en el punto de tangencia, es siempre recto. Lo importante no es solo verificar la igualdad numérica (90°) en uno o dos casos, sino observar que esa igualdad se conserva al mover el punto de tangencia y al modificar el radio de la circunferencia. La propiedad se revela como una regularidad geométrica que el entorno dinámico hace visible y que después podrá utilizarse como herramienta para construir tangentes sin recurrir a la opción directa de GeoGebra.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Deslizador**, crear un deslizador r con valores de 1 a 10.
2. Con la herramienta **Punto**, marcar un punto **O**, que será el centro de la circunferencia.
3. Con la herramienta **Circunferencia (centro y radio)**, construir una circunferencia con centro en **O** y radio r .
4. Con la herramienta **Punto en objeto**, marcar un punto **T** sobre la circunferencia. Este será el punto de tangencia.
5. Con la herramienta **Segmento**, trazar el segmento $\overline{OT}$, que es el radio dirigido al punto de tangencia.
6. Con la herramienta **Tangente**, trazar la tangente a la circunferencia que pase por **T**.
7. Con la herramienta **Ángulo**, medir el ángulo formado entre el radio $\overline{OT}$ y la tangente en **T**.

8. Con la herramienta **Mueve**, arrastrar el punto **T** a lo largo de la circunferencia. Observar la medida del ángulo en cada posición.
9. Mover también el deslizador r para modificar el tamaño de la circunferencia. Observar si la propiedad se conserva (Figura 8.4).

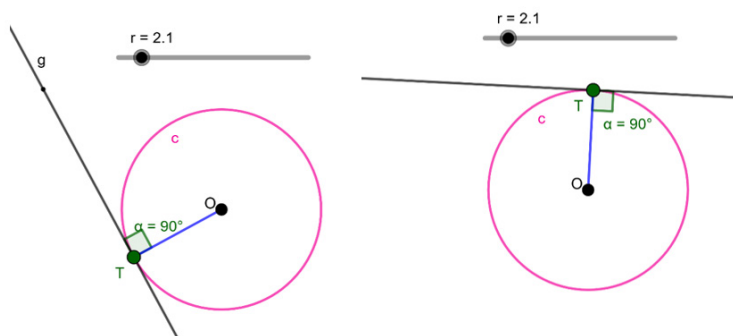


Figura 8.4. La perpendicularidad entre el radio y la tangente.

Nota: La perpendicularidad entre el radio y la tangente es uno de los resultados más útiles de la geometría de la circunferencia y aparece como pieza fundamental en numerosas construcciones posteriores. Por ejemplo, el problema clásico de trazar las tangentes a una circunferencia desde un punto exterior, la construcción del incírculo y del circuncírculo de un triángulo, y la demostración de propiedades de los polígonos circunscritos. Aunque GeoGebra ofrece la herramienta Tangente, conviene que el estudiante reconozca que esa herramienta no adivina la tangente, sino que aplica precisamente esta propiedad: construir la perpendicular al radio en el punto de tangencia. Esa toma de conciencia transforma el uso del software de operación mecánica en operación geoméricamente fundamentada.

Preguntas para la reflexión:

- a) **Observación:** ¿Qué medida tiene el ángulo entre el radio OT y la tangente cuando T se ubica en distintas



posiciones de la circunferencia? ¿Esa medida cambia al mover T? ¿Cambia al modificar el radio r ?

b) Comprensión: ¿Por qué esta perpendicularidad se conserva siempre, independientemente de la posición de T y del tamaño de la circunferencia? Si la recta que pasa por T formara con OT un ángulo distinto de 90° , ¿seguiría siendo una recta tangente o existiría la posibilidad de que interseque a la circunferencia en un segundo punto? Justifica tu respuesta a partir de las propiedades de la recta tangente.

c) Conjetura: Si conocemos solo el centro O y un punto T sobre la circunferencia, ¿podríamos construir la tangente en T sin usar la herramienta Tangente de GeoGebra? ¿Qué otra herramienta del programa permitiría hacerlo, y por qué?

Síntesis del apartado

En este contexto, la distinción entre circunferencia y círculo trasciende lo terminológico para volverse operativa: la primera es la frontera definida por la igualdad de distancias, mientras que el segundo es el conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad (puntos interiores y frontera). Sobre esta base, los elementos lineales (cuerda, diámetro, secante y tangente) se presentan como construcciones interconectadas, donde la tangente emerge como caso límite de la secante cuando sus dos puntos de corte se acercan hasta coincidir. El apartado cierra con un primer invariante notable, la perpendicularidad entre el radio y la tangente en el punto de tangencia. Con estos elementos y este invariante en aprendido, el estudiante queda preparado para abordar las relaciones que se sostienen sobre la circunferencia, la razón constante π , los ángulos central e inscrito, el teorema de Tales y los polígonos inscritos y circunscritos.



8.3. Razones, ángulos y polígonos: invariantes en la circunferencia

Una vez establecida la circunferencia como lugar geométrico, distinguida del círculo como región e introducidos sus elementos lineales, el trabajo se desplaza ahora hacia las relaciones que se sostienen sobre esa estructura. El foco de este apartado deja de estar en definir y nombrar los elementos para concentrarse en los invariantes, en las relaciones que permanecen constantes, aunque cambien las dimensiones, la posición o la orientación de la figura. Identificar invariantes constituye una operación intelectual de alto valor en la formación geométrica, porque implica distinguir entre los rasgos accidentales de una representación particular y las propiedades constitutivas del objeto matemático (Duval, 2006).

Las actividades del apartado se organizan en torno a tres ejes. El primero es la razón constante entre longitud y diámetro, que da origen al número π y muestra que toda circunferencia, independientemente de su tamaño, comparte una misma relación numérica entre sus dimensiones. El segundo son los invariantes angulares: la relación entre el ángulo central y el ángulo inscrito que subtienden el mismo arco, junto con su caso particular más célebre, el teorema de Tales sobre la circunferencia. El tercero es el vínculo con los polígonos regulares trabajados en el capítulo 6, los polígonos inscritos y los circunscritos aproximan la circunferencia, los primeros desde el interior y los segundos desde el exterior, acercándose a ella cada vez más al aumentar el número de lados, sin alcanzarla nunca por completo. El apartado cierra extendiendo la razón π hacia porciones de la figura: la longitud de un arco y el área de un sector circular se obtienen, por simple proporcionalidad, a partir del mismo invariante inicial.





En todo este recorrido, GeoGebra desempeña un papel distinto al del apartado anterior. Allí se usó sobre todo para construir y nombrar; aquí se utiliza para verificar dinámicamente la estabilidad de las relaciones, haciendo visible que ciertas regularidades geométricas no son rasgos accidentales de figuras particulares sino propiedades estables del lugar geométrico (Arzarello et al., 2002; Laborde, 2000).

• **Actividad con GeoGebra 1: El descubrimiento de π .**

Objetivo: Verificar que la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro permanece constante e igual a π .

Idea didáctica: La actividad busca que el estudiante descubra experimentalmente que, aunque una circunferencia cambie de tamaño, la relación entre su longitud y su diámetro permanece constante. El uso del deslizador permite observar que L y d varían proporcionalmente, de modo que su cociente no cambia. De esta manera, π deja de presentarse como un dato para memorizar y se comprende como una relación geométrica invariante.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Deslizador**, crear un deslizador d con valores de 1 a 10. Este deslizador representará la medida del diámetro de la circunferencia.
2. Definir el radio dependiente del deslizador escribiendo en la Vista Algebraica: $r = d/2$.
3. Con la herramienta **Punto**, ubicar un punto y renombrarlo como **O**. Este será el centro de la circunferencia.
4. Con la herramienta **Circunferencia (centro y radio)**, construir una circunferencia con centro en **O** y radio **r**.

5. Mostrar la longitud de la circunferencia escribiendo en la Vista Algebraica: $L = \text{Perímetro}(c)$, donde c es el nombre asignado automáticamente por GeoGebra a la circunferencia construida (puede verificarse en la Vista Algebraica). Alternativamente, se puede usar la herramienta Distancia o Longitud haciendo clic sobre la circunferencia, y luego renombrar el valor como L . Opcionalmente, con la herramienta Texto puede crearse un texto visible en la Vista Gráfica que muestre “Perímetro de $c =$ ” + L , para visualizar directamente la longitud sobre la pantalla.
6. Definir la variable cociente escribiendo en la Vista Algebraica: $\text{cociente} = L/d + 0$. (El $+ 0$ evita que GeoGebra muestre el resultado como el símbolo π y lo presenta como un número decimal, lo cual permite descubrir la aproximación al valor de π .)
7. Con la herramienta **Texto**, crear un texto dinámico que muestre el valor del cociente $\frac{L}{d} =$. A continuación, desde la pestaña Avanzado $\rightarrow$ Objetos, insertar la variable cociente. El resultado mostrará en la vista gráfica: $\frac{L}{d} = 3.1416$
8. Ajustar el redondeo a 5 cifras decimales en Configuración (Propiedades) $\rightarrow$ Redondeo, para observar con mayor precisión que $\text{cociente} \approx 3.14159$.
9. Utilizar la herramienta Mueve para modificar el valor del deslizador d y observar cómo cambian el diámetro y la longitud de la circunferencia. Verificar que el cociente L/d permanece aproximadamente constante y se aproxima al número π (Figura 8.5). ¿Qué relación matemática se puede deducir entre L , d y π a partir de esta observación?



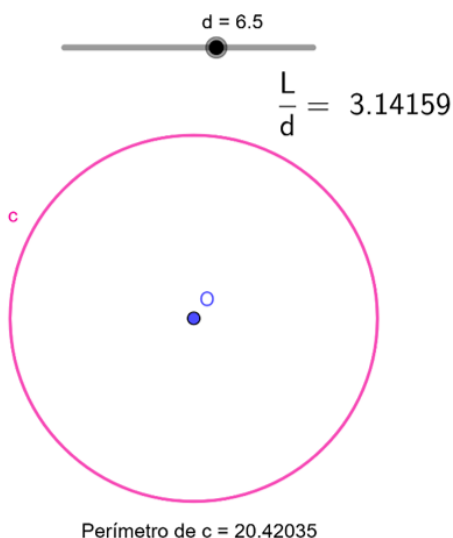


Figura 8.5. El descubrimiento de π .

Preguntas para la reflexión:

- a) Observación:** Al triplicar el diámetro con el deslizador, ¿qué sucede con la longitud de la circunferencia? ¿Crece, decrece o se mantiene? ¿En qué proporción?
- b) Comprensión:** A pesar de que L y d cambian de valor al mover el deslizador, ¿qué ocurre con el resultado del cociente L/d ? ¿Por qué este resultado no depende del tamaño de la circunferencia sino solamente del tipo de figura que la genera?
- c) Conjetura:** Si tuviéramos una circunferencia del tamaño de un planeta o del tamaño de una moneda, ¿cambiaría el valor de este cociente? ¿Qué nos dice esto sobre la naturaleza de π como número matemático?

Nota: El número π aparece en cualquier circunferencia del universo, sin importar su tamaño, su material o el contexto en el que esté inscrita. Lo que esta actividad hace visible es que π no se calcula propiamente, sino que se descubre como el cociente que la geometría

mantiene constante. Esta idea de una razón que se mantiene invariante está en el centro del apartado. Los invariantes angulares, el teorema de Tales sobre la circunferencia y las relaciones que conectan la circunferencia con los polígonos regulares son, todos, manifestaciones del mismo principio que aquí aparece por primera vez con el número π .

- **Actividad con GeoGebra 2: Ángulo central e inscrito: la ley del 2:1.**

Objetivo: Verificar la relación 2:1 entre el ángulo central y el ángulo inscrito que subtienden un mismo arco.

Idea didáctica: La actividad busca que el estudiante observe que una misma porción de circunferencia, es decir, un mismo arco, puede ser vista desde dos posiciones distintas: desde el centro de la circunferencia y desde un punto ubicado sobre la circunferencia. Al medir ambos ángulos y variar la posición del punto P, el alumno puede descubrir que la relación entre ellos no depende del tamaño de la circunferencia, sino del arco que ambos intersecan o subtienden.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Circunferencia (centro, punto)** trazar una circunferencia. Renombrar su centro como **O** y la circunferencia como **c**.
2. Con la herramienta **Punto** en objeto, marcar dos puntos fijos sobre la circunferencia y nombrarlos **A** y **B**.
3. Crear un deslizador tipo Ángulo llamado α con valores entre 0° y 360° , que servirá para mover el punto P sobre la circunferencia.
4. En la Vista Algebraica, definir el punto P escribiendo: $P = O + (\text{radio}(c); \alpha)$. Esto ubica a P sobre la circunferencia a un ángulo α respecto al centro, de modo que su posición dependerá del deslizador.





5. Con la herramienta **Segmento**, trazar los segmentos: $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$. Los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son los radios que forman el ángulo central; $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ forman el ángulo inscrito.
6. Con la herramienta **Arco de circunferencia (centro, punto, punto)**, trazar el arco $\widehat{AB}$ que no contiene a P , resaltarlo con un color distintivo. Este es el arco común que ambos ángulos subtienden, ángulo central $\angle AOB$ y al ángulo inscrito $\angle APB$.
7. Con la herramienta **Ángulo**, medir el ángulo central $\angle AOB$ (haciendo clic en los puntos en ese orden, o en orden inverso si el ángulo aparece mayor a 180°).
8. Con la herramienta **Ángulo**, medir el ángulo inscrito $\angle APB$.
9. Mover el deslizador a y observar cómo cambian las medidas de ambos ángulos (Figura 8.6).

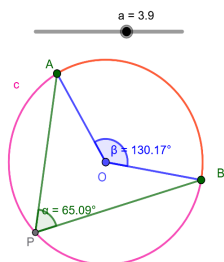


Figura 8.6. Relación del ángulo central e inscrito en la circunferencia.

Preguntas para la reflexión:

- Observación:** Al mover P a lo largo del mismo arco con el deslizador, ¿cambia la medida del ángulo inscrito $\angle APB$?
- Comprensión:** ¿Qué relación numérica hay entre el ángulo central $\angle AOB$ y el ángulo inscrito $\angle APB$? ¿Se mantiene esta relación si cambiamos el tamaño de la circunferencia?

c) Conjetura: ¿Qué sucede con el ángulo inscrito si los puntos A y B forman un diámetro, es decir, si el ángulo central mide 180° ?

• **Actividad con GeoGebra 3: El teorema de Tales sobre la circunferencia.**

Objetivo: Verificar que todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

Idea didáctica: En la actividad anterior, el estudiante descubrió que el ángulo central mide el doble del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco. Esta nueva actividad explora un caso especial particularmente bello: ¿qué ocurre cuando el ángulo central es exactamente 180° , es decir, cuando los extremos del arco forman un diámetro de la circunferencia? Al mover el punto P sobre la semicircunferencia, el estudiante verificará que, sin importar la posición de P, el ángulo inscrito siempre mide 90° . De esta forma, el teorema deja de ser una afirmación abstracta y se convierte en una invariante geométrica que se descubre experimentalmente.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Deslizador**, crear uno tipo Número y llamarlo **r** con un intervalo de 1 a 10, que servirá para modificar la longitud del radio de la circunferencia.
2. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio**, trazar una circunferencia con centro en **O** y radio **r**.
3. Con la herramienta **Punto** en objeto, marcar un punto **A** sobre la circunferencia.
4. Con la herramienta **Simetría Central**, hacer clic en el punto **A** y luego en el centro **O** para obtener el punto opuesto del punto **A**, y renombrarlo **B**. Esto garantiza que **A**, **O** y **B** queden alineados, formando un diámetro de la circunferencia.
5. Con la herramienta **Segmento**, trazar el segmento $\overline{AB}$.





6. Con la herramienta **Deslizador**, crear uno tipo Ángulo y llamarlo **a**, con un intervalo de 0° a 180° , que servirá para mover el punto **P** sobre la semicircunferencia.
7. Con la herramienta **Ángulo** dada su amplitud hacer clic primero en el punto **B**, luego en el centro **O** y en amplitud escribir **a**. Se creará un punto auxiliar **B'**.
8. Con la herramienta **Semirrecta**, trazar una con origen en **O** y pase por **B'**.
9. Con la herramienta **Intersección**, marca el punto donde la semirrecta interseca a la circunferencia. Renómbalo como **P**.

Nota: Ocultar la semirrecta y el punto **B'** para que la vista quede limpia.

10. Con la herramienta **Segmento** para trazar los lados **PA** y **PB**.
11. Con la herramienta **Arco de circunferencia**, trazar el arco **AB** haciendo clic en **O**, luego en **B** y finalmente en **A** (sentido horario para la parte inferior). Darle un color llamativo.
12. Con la herramienta **Ángulo** determinar la amplitud del $\angle APB$ (hacer clic en los puntos en este orden: **A**, **P** y **B**).
13. Con la herramienta **Texto** crear un texto dinámico que muestre el valor del ángulo **a**, escribir $\angle APB =$. En la pestaña de **Objetos**, seleccionar el nombre que GeoGebra le dio al ángulo, o sea **a**.
14. Con la herramienta **Mueve** modificar el valor del deslizador **a** y observar la medida del ángulo inscrito en distintas posiciones de **P** sobre la semicircunferencia (Figura 8.7).

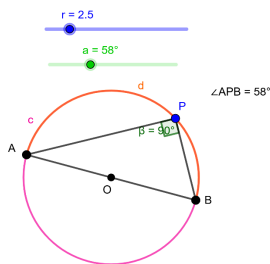


Figura 8.7. El teorema de Tales sobre la circunferencia.

Preguntas para la reflexión:

- a) Observación:** Al mover el deslizador y desplazar P a lo largo de la semicircunferencia, ¿cambia la medida del ángulo $\angle APB$? ¿Qué valor toma este ángulo en cada posición de P?
- b) Comprensión:** Recordando la actividad anterior, sabemos que el ángulo central mide el doble del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco. Si en este caso el ángulo central es de 180° (porque A, O y B están alineados sobre el diámetro), ¿cómo se explica entonces que el ángulo inscrito sea siempre 90° ? ¿Es el teorema de Tales un caso particular de la ley del 2:1?
- c) Conjetura:** Si trazáramos los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ para distintas posiciones de P, todos esos segmentos formarían un ángulo recto en P. ¿Qué figura describiría el triángulo APB en cualquiera de esas posiciones? ¿Qué papel cumple el segmento en ese triángulo?
- d) Conexión visual:** Observa el arco resaltado. ¿Cómo se relaciona el tamaño de ese arco con el valor del ángulo inscrito? ¿Por qué el resultado no depende del tamaño de la circunferencia ni de la posición específica de P sobre la semicircunferencia superior?





Nota: El teorema de Tales sobre la circunferencia, atribuido al matemático griego Tales de Mileto (siglo VI a.C.), es una de las afirmaciones geométricas más antiguas que se conservan documentadas. Su importancia radica en que conecta tres ideas centrales de la geometría del círculo: el concepto de diámetro, la noción de ángulo inscrito y la propiedad del ángulo recto. Esta actividad muestra que el teorema no es una regla aislada, sino una consecuencia natural de la relación entre el ángulo central y el inscrito descubierta en la actividad anterior. Al hacer del ángulo central un ángulo llano (180°), su mitad, el ángulo inscrito, se convierte necesariamente en un ángulo recto (90°). Esta es otra manifestación del principio de invariancia geométrica que recorre todo el apartado: una propiedad que permanece constante sin importar el tamaño ni la orientación de la figura.

- **Actividad con GeoGebra 4: Polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia.**

Objetivo: Identificar cómo los polígonos regulares inscritos y circunscritos se aproximan a la circunferencia al aumentar el número de lados.

Idea didáctica: Esta actividad cierra el recorrido del apartado relacionando polígonos (figuras de lados rectos) y circunferencia (línea curva). El estudiante observará que, al aumentar el número de lados de un polígono regular, su forma se vuelve indistinguible de un círculo. Esta idea, que Arquímedes utilizó hace más de 2.200 años para estimar el valor de π , encierra la noción central de aproximación por límite, lo curvo puede pensarse como el destino al que se acerca lo recto cuando se le permite tener cada vez más lados. Al medir y comparar perímetros y áreas, el alumno verá que el polígono inscrito queda siempre dentro del círculo y el circunscrito siempre fuera, de modo que la circunferencia se ubica entre ambos como un valor intermedio que ambos polígonos van aproximando cada vez con mayor precisión a medida que n crece.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Deslizador**, crear uno tipo Número y llamarlo **r** con un intervalo de 1 a 10, que servirá para modificar la longitud del radio de la circunferencia.
2. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio**, trazar una circunferencia con centro en un punto que se renombrará como **O** y radio **r**.
3. Con la herramienta **Punto**, marcar un punto **A** sobre la circunferencia.
4. Con la herramienta **Deslizador**, crear uno tipo Entero y llamarlo **n** con un intervalo de mínimo 3 (el polígono más simple) y un máximo de 50 o 100.
5. Con la herramienta **Ángulo** dada su amplitud, hacer clic en el punto **A**, luego en el centro **O** de la circunferencia, en amplitud, escribir $360^\circ/n$. Se creará un punto **A'**.
6. Con la herramienta **Polígono Regular**, hacer clic en **A**, luego en **A'** y en número de vértices, escribir **n**.
7. Con la herramienta **Tangentes**, trazar una recta tangente a la circunferencia que pase por el punto **A** y otra que pase por el punto **A'**.
8. Con la herramienta **Intersección** marcar el punto donde intersección de ambas tangentes y llamarlo **T**.
9. Con la herramienta **Simetría central**, hacer clic primero en el punto **T** y luego en el punto **A'**. GeoGebra creará un nuevo punto, que será el vértice adyacente a **T** en el polígono circunscrito; renombrarlo como **T'**.
10. Con la herramienta **Polígono regular**, hacer clic en el punto **T**, luego en el punto **T'**, y en número de vértices escribir **n**. Esto construye el polígono circunscrito, con la circunferencia tangente a todos sus lados.



11. Ocultar las dos rectas tangentes del paso 7 para que no interfieran con la visualización.

12. Para obtener el perímetro y área de cada figura se puede:

(1) Con la herramienta **Distancia o Longitud**, hacer clic sobre la circunferencia, después en el interior del polígono inscrito y luego en el polígono circunscrito. GeoGebra creará automáticamente textos dinámicos en la Vista Gráfica con los perímetros y áreas correspondientes.

(2) En la **Vista Algebraica** barra de Entrada, definir los tres perímetros: **Pinscrito = Perímetro(pol1)**, **Pcírculo = Perímetro(c)** y **Pcircunscrito = Perímetro(pol2)**. Además, las tres áreas: **Ainscrito = Área(pol1)**, **Acírculo = Área(c)**, **Acircunscrito = Área(pol2)**.

Nota: Verificar los nombres reales de los polígonos en la Vista Algebraica antes de escribir.

13. Con la herramienta Texto, crear un cuadro dinámico que muestre los tres perímetros juntos, para observar en tiempo real su aproximación al mover el deslizador n . Así como las tres áreas (Figura 8.8).

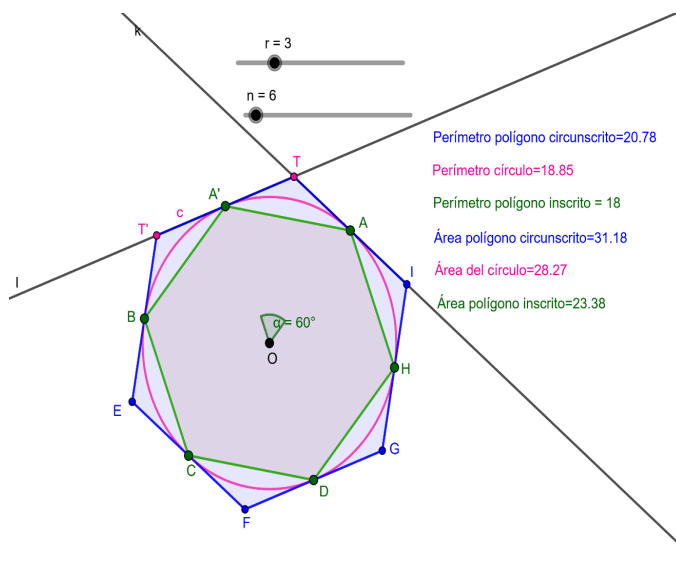


Figura 8.8. Polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia.

Preguntas para la reflexión:

a) Observación: Mueve el deslizador n y registra en la siguiente tabla los valores que muestra GeoGebra para distintos números de lados. Mantén r fijo en 3 (Tabla 8.1).

Tabla 8.1. Comparación de los perímetros y áreas del círculo y de los polígonos inscritos y circunscritos.

n (lados)	Perímetro polígono inscrito	Perímetro círculo	Perímetro polígono circunscrito	Área polígono inscrito	Área círculo	Área polígono circunscrito
3						
4						
6						
8						
12						
20						
30						
50						

A partir de los datos registrados responder: ¿Qué columnas se mantienen constantes al variar n ? ¿Por qué? ¿En qué fila las diferencias entre los polígonos y el círculo son mayores? ¿Y menores? ¿En qué momento se vuelve difícil distinguir los polígonos de la propia circunferencia?

b) Comprensión: Para un mismo valor de n , ¿cómo se relacionan los tres perímetros entre sí? ¿Y las tres áreas? ¿Por qué se cumple geométricamente que el polígono inscrito tiene siempre menor perímetro y menor área que el círculo, mientras que el circunscrito los tiene siempre mayores? ¿Esta relación se mantiene si cambiamos el tamaño del radio r ?

c) Conjetura: A medida que n crece, los perímetros y áreas de los polígonos se aproximan a los del círculo. ¿Tiene sentido afirmar que la circunferencia es





un polígono regular de infinitos lados? Si dividieras **Pinscrita / (2r) y Pcircunscrita / (2r)** para valores grandes de **n**, ¿hacia qué número se acercarían ambos cocientes? ¿Por qué esta forma de pensar, de aproximar lo curvo mediante lo recto, resultó tan revolucionaria en la historia de las matemáticas?

- **Actividad con GeoGebra 5: Longitudes de arco y áreas de sectores.**

Objetivo: Deducir la proporcionalidad entre la amplitud del ángulo central, la longitud del arco y el área del sector circular .

Idea Didáctica: Esta actividad busca romper con la enseñanza puramente algorítmica de las fórmulas de arco y sector. Al utilizar GeoGebra, el estudiante no solo “ve” la porción del círculo, sino que experimenta cómo estas medidas son una fracción exacta del total (**$2\pi r$** para el perímetro y **πr^2** para el área). Se recomienda que los alumnos manipulen el deslizador **α** en valores clave (**90°** , **180°** , **120°**) para que descubran por sí mismos que, por ejemplo, si el ángulo es la cuarta parte de **360°** , el área será la cuarta parte del círculo total.

Construcción sugerida en GeoGebra:

1. Con la herramienta **Deslizador**, crear uno tipo Número y llamarlo **r** con un intervalo de 1 a 10, que servirá para modificar la longitud del radio de la circunferencia.
2. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio**, trazar una circunferencia con centro en un punto que se renombrará como **O** y radio **r**.
3. Con la herramienta **Punto**, marcar un punto **A** sobre la circunferencia.
4. Con la herramienta **Deslizador**, crear uno tipo Ángulo y llamarlo **a** con un intervalo de **0° a 360°** .
5. Con la herramienta **Ángulo** dada su amplitud, hacer clic en el punto **A**, luego en el centro **O** de la

- circunferencia y, en amplitud, escribir **a**. Se creará un punto **A'**.
- Con la herramienta **Arco de circunferencia**, hacer clic en el centro **O**, luego en el punto **A** y finalmente en **A'**. (Este resaltará la porción del borde).
 - Con la herramienta **Sector circular**, hacer clic en el centro **O**, luego en el punto **A** y finalmente en **A'**.
 - Ajustar el redondeo a 4 cifras decimales en **Configuración (Propiedades)** → **Redondeo**, para observar con precisión los cambios en las magnitudes.
 - En la **Vista Algebraica** barra de Entrada, definir las medidas:
 - **LongitudArco = Longitud(d)** (donde d es el nombre del arco).
 - **ÁreaSector = Área(e)** (donde e es el nombre del sector).
 - Con la herramienta **Texto**, crear un cuadro dinámico que muestre:
 - Ángulo central a = (vincular al objeto a).
 - Longitud del arco = (vincular al objeto LongitudArco).
 - Área del sector = (vincular al objeto ÁreaSector).

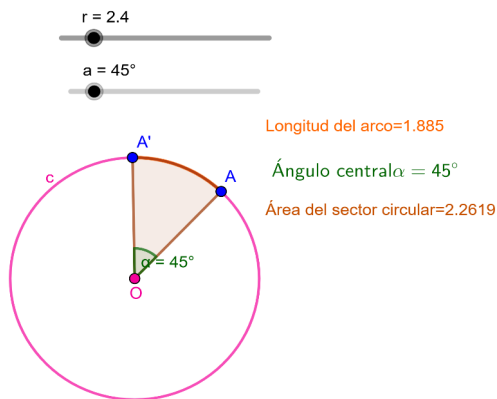


Figura 8.9. Longitudes de arco y áreas de sectores.





Preguntas para la reflexión:

- a) **Observación:** Si dejas el radio r fijo y mueves el deslizador del ángulo α , ¿qué relación notas entre el crecimiento del ángulo y el crecimiento del área del sector?
- b) **Comprensión:** Al usar el redondeo de 4 decimales, ¿qué sucede con la longitud del arco cuando el ángulo es exactamente 180° ? ¿Qué parte del perímetro total representa?
- c) **Conjetura:** Si duplicas el radio de la circunferencia, pero mantienes el mismo ángulo α , ¿el área del sector también se duplica o aumenta de otra manera?
- d) **Conexión visual:** ¿Cómo podrías usar esta construcción para explicarle a alguien qué fracción de un círculo completo representa un sector de 60° ?

Síntesis del apartado

El apartado muestra que las propiedades de la circunferencia constituyen invariantes geométricas derivados de la equidistancia al centro. Relaciones como π , la correspondencia entre ángulo central e inscrito y el teorema de Tales evidencian regularidades estables susceptibles de observación y justificación. Asimismo, las actividades introducen de manera intuitiva las nociones de aproximación y límite mediante polígonos inscritos y circunscritos, y extienden la proporcionalidad a la longitud de arcos y áreas de sectores. En conjunto, la circunferencia se comprende como una estructura geométrica organizada por relaciones invariantes y no solo como una figura curva.

A lo largo de este capítulo se ha mostrado que la enseñanza de la circunferencia y el círculo no puede reducirse al simple reconocimiento de una figura redonda ni a la aplicación mecánica de fórmulas. La comprensión de estos objetos geométricos exige distinguir entre la curva y la región que delimita, reconocer la equidistancia respecto al centro como propiedad

definitoria, entender π como una razón constante y analizar las relaciones angulares que emergen de la estructura de este lugar geométrico. Cada uno de estos aspectos supone un avance conceptual que el estudiante difícilmente alcanza de manera espontánea; requiere, por el contrario, situaciones didácticas que problematicen sus concepciones iniciales, favorezcan la exploración y la formulación de conjeturas, y conduzcan progresivamente hacia la argumentación y la justificación.

En todo el capítulo, GeoGebra ha ocupado un lugar relevante como mediador didáctico. Su potencialidad para transformar configuraciones sin alterar las relaciones esenciales permite hacer visibles propiedades que suelen permanecer ocultas en representaciones estáticas, tales como la equidistancia, la constancia de π y la invariancia de determinadas relaciones angulares. Sin embargo, el potencial de la herramienta no reside únicamente en sus recursos tecnológicos, sino en el modo en que las tareas son diseñadas, en las preguntas que orientan la actividad matemática y en los espacios de discusión que posibilitan la construcción colectiva de significados. La herramienta amplía las posibilidades de exploración; la comprensión emerge de la mediación pedagógica.

Pensar la enseñanza de la circunferencia y el círculo implica, en última instancia, ofrecer a los estudiantes una experiencia de la geometría entendida como sistema de relaciones y no como un repertorio aislado de figuras y fórmulas. En ello reside el verdadero aprendizaje geométrico: en el tránsito desde la percepción hacia la comprensión y desde la comprensión hacia la argumentación fundamentada.

Preguntas para la reflexión docente

Sobre las concepciones previas y los obstáculos:

1. ¿Cómo se presentan habitualmente la circunferencia y el círculo en mis clases? ¿Tiendo a tratarlos



como sinónimos o establezco con claridad la diferencia entre la curva y la región?

2. ¿Qué errores y confusiones he observado con mayor frecuencia en mis estudiantes al trabajar con estos objetos? ¿Qué hago cuando aparecen?
3. ¿Cómo reaccionan mis estudiantes cuando se les pide definir, no solo reconocer, una circunferencia? ¿Qué revelan sus respuestas sobre el modo en que comprenden la figura?

Sobre el diseño de las tareas:

4. ¿Las tareas que propongo invitan a explorar propiedades, o se limitan a aplicar fórmulas? ¿Qué espacio doy a la formulación de conjeturas?
5. ¿Cómo introduzco el número π ? ¿Aparece como una constante que los estudiantes descubren al medir, o como un dato que deben memorizar?
6. ¿Qué oportunidades ofrezco para que los estudiantes argumenten por qué se cumplen las relaciones que observan?

Sobre el papel de GeoGebra:

7. ¿Uso GeoGebra como una herramienta de presentación o como un entorno de exploración? ¿Quién manipula la construcción: yo o los estudiantes?
8. ¿Las construcciones que propongo permiten al estudiante distinguir entre lo que cambia y lo que permanece? ¿Qué preguntas formulo para hacer visible esa diferencia?
9. ¿Aprovecho la posibilidad del arrastre para cuestionar la dependencia de los prototipos visuales, o tiendo a mostrar siempre la figura en su posición canónica?

10. Sobre la mediación didáctica:

11. ¿Qué tipo de preguntas guían mis intervenciones durante las actividades? ¿Predominan las que piden identificar o las que piden justificar?



12. ¿Cómo gestiono los momentos en que los estudiantes formulan conjeturas erróneas? ¿Las descarto, las corrijo o las uso como punto de partida para discutir?
13. ¿Qué evidencias recojo del aprendizaje geométrico de mis estudiantes más allá de los resultados de un examen? ¿Cómo valoro su capacidad de argumentar y de relacionar propiedades?



Lo que se ha recorrido, lo que queda por recorrer

Este Tomo I ha intentado articular una propuesta integral para la enseñanza de la geometría escolar, en la que lo conceptual, lo didáctico y lo tecnológico se entrelazan en un mismo proyecto. El recorrido no fue lineal en cuanto al contenido, pero sí coherente en cuanto a su intención. La geometría escolar puede ser un campo de pensamiento y no un repertorio de figuras a reconocer, y para que efectivamente lo sea, el docente debe disponer de una mirada articulada que reúna teoría, didáctica y tecnología en un mismo gesto profesional.

La primera parte del libro estableció ese marco general. El Capítulo 1 situó la geometría escolar dentro del currículo y de la práctica docente, reconociendo la brecha que con frecuencia se abre entre lo que se prescribe oficialmente y lo que efectivamente se enseña. Propuso pensar la geometría desde cuatro dimensiones articuladas, esto es, la visualización, la construcción, la argumentación y la modelación, y desde allí ubicó a GeoGebra como un recurso integrador. El Capítulo 2 retomó la teoría de Van Hiele para mostrar que los estudiantes no acceden a las ideas geométricas del mismo modo ni con el mismo nivel de elaboración, y que la enseñanza debe respetar esos niveles sucesivos en lugar de saltárselos.

La segunda parte profundizó en la intervención docente. El Capítulo 3 movilizó la teoría de los registros de representación semiótica de Duval para mostrar que comprender en geometría no se reduce a ver una figura, sino que exige coordinar distintas formas de representación y transitar entre ellas con sentido matemático. El Capítulo 4 examinó a GeoGebra como entorno de aprendizaje, nombrando con honestidad sus potencialidades y también sus riesgos, y proponiendo criterios concretos para decidir cuándo y para qué utilizarlo.



La tercera parte tradujo todo lo anterior en propuestas concretas para el aula. El Capítulo 5 trabajó las figuras y relaciones que estructuran el espacio, desde las rectas y los ángulos hasta los triángulos y sus puntos notables. El Capítulo 6 introdujo las relaciones métricas entre figuras, formalizando la congruencia como invariancia bajo movimiento, la semejanza como conservación de la forma bajo cambio de escala, y el teorema de Tales como expresión estructural de la proporcionalidad derivada del paralelismo. El Capítulo 7 abordó los cuadriláteros como caso paradigmático de la clasificación inclusiva, y desde allí generalizó la mirada hacia los polígonos. El Capítulo 8 cerró el recorrido con la circunferencia y el círculo, mostrando que la geometría conserva la capacidad de sorprender aun en sus tramos más clásicos cuando el entorno de mediación permite hacer visibles sus relaciones.

A lo largo de los ocho capítulos, ciertas ideas han sido recurrentes. La distinción entre el dibujo y el objeto geométrico ha funcionado como criterio articulador desde el primer capítulo hasta el último. La prueba del arrastre ha aparecido como dispositivo metodológico para hacer visible esa distinción y para sostener la transición desde la observación perceptiva hacia la argumentación geométrica. Las preguntas de reflexión, organizadas en niveles graduales y orientadas tanto a los estudiantes como a los docentes, han buscado convertir cada actividad en una oportunidad para que el aprendizaje y la enseñanza se construyan en diálogo.

El libro no agota su tema, lo que aquí se ha trabajado, las figuras del plano y las relaciones métricas que las estructuran constituyen solo una parte del territorio geométrico. Quedan por recorrer las transformaciones del plano y su lógica de invariancia, la visualización espacial y el paso de la geometría plana a la tridimensional, y la geometría analítica como puente entre la figura y la expresión simbólica. Esos temas, junto con otros que enriquecerán la mirada didáctica



aquí iniciada, serán objeto del Tomo II, actualmente en preparación.

Mientras tanto, este primer volumen queda en manos del lector docente como una herramienta de trabajo y como una invitación. Su valor último no reside en las construcciones específicas que propone ni en las actividades que detalla, sino en la manera de pensar la clase de geometría que se infiere de su conjunto. Una manera que no concibe la enseñanza como transmisión de contenidos cerrados, sino como diseño intencional de experiencias donde los estudiantes puedan observar, construir, formular conjeturas y argumentar. Si este libro contribuye a que esa manera se vuelva más reconocible en el aula y más sostenible en la práctica profesional cotidiana, habrá cumplido su propósito.



- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 34(3), 66–72. <https://doi.org/10.1007/BF02655708>
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843–908). Information Age Publishing.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420–464). Macmillan.
- Cortés Velásquez, L. X., Badillo Durán, L., Calderón Acosta, J. G., & Espinel Blanco, J. E. (2024). Didáctica para el desarrollo del pensamiento geométrico-métrico en la educación media. *Mundo FESC*, 14(30), 183–198. <https://doi.org/10.61799/2216-0388.1724>
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Fiallo, J., & Gutiérrez, Á. (2014). El proceso del descubrimiento en la clase de geometría usando software de geometría dinámica. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau, & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 269–278). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.





- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139–162. <https://doi.org/10.1007/BF01273689>
- Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9(1–2), 3–20. <https://doi.org/10.1080/14794800008520167>
- Gutiérrez, Á., & Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 9(2), 53–83. <https://doi.org/10.30827/pna.v9i2.6106>
- Hart, K. M. (Ed.). (1981). *Children's understanding of mathematics: 11–16*. John Murray.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70–95). Cambridge University Press.
- Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: The case of GeoGebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3), 126–131. https://eprints.soton.ac.uk/50742/2/Hohenwarter_Jones_link_geom_alg_GeoGebra_2007.pdf
- Jones, K. (2005). Research on the use of dynamic geometry software: Implications for the classroom. *MicroMath*, 21(2), 36–41. https://eprints.soton.ac.uk/18815/01/Jones_research_use_DGS_2005.pdf
- Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1–3), 151–161. <https://doi.org/10.1023/A:1012793121648>

- Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions: Two sides of the use of dynamic geometry environments. En S. C. Chu, H. C. Lew, & W. C. Yang (Eds.), *Proceedings of the 10th Asian Technology Conference in Mathematics* (pp. 22–35). Korea National University of Education.
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 275–304). Sense Publishers.
- Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Information Age Publishing.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93–118). Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics.
- Leung, A. (2014). Principles of acquiring invariant in mathematics task design: A dynamic geometry example. En P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 89–96). PME.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM. <https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/>
- Sinclair, N., & Robutti, O. (2013). Technology and the role of proof: The case of dynamic geometry. En M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 571–596). Springer.



Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Moutsios-Rentzos, A. (2023). Proof and proving in school and university mathematics education research: A systematic review. *ZDM: Mathematics Education*, 56(1), 47–59. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01518-y>

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic Press.



Anexo 1. Herramientas de GeoGebra utilizadas en el libro

Este anexo reúne las herramientas de GeoGebra que aparecen a lo largo de las actividades del Tomo I, presentadas en orden alfabético para facilitar la consulta rápida. Para cada herramienta se indica brevemente qué hace y los contextos del libro en los que se utiliza. El propósito no es sustituir la documentación oficial de GeoGebra, que puede consultarse en <https://geogebra.github.io/docs/manual/es/>, sino ofrecer al docente una referencia ágil para localizar las herramientas mencionadas a lo largo de los capítulos.

GeoGebra está disponible en varias versiones, entre ellas Geometría, Gráficas y GeoGebra Clásico. Las herramientas descritas en este anexo aparecen en GeoGebra Clásico, que es la versión utilizada como referencia en este libro. Algunas herramientas pueden recibir nombres ligeramente distintos según la versión y el idioma de la aplicación, aunque el docente puede identificarlas por su función.

- Animación. Permite que un parámetro o un punto se mueva automáticamente, generando una visualización continua del proceso. Útil para mostrar trayectorias y lugares geométricos, como en la generación de la circunferencia a partir del rastro de un punto que la recorre.
- Ángulo. Mide el ángulo definido por tres puntos, dos rectas o dos segmentos. Aparece en prácticamente todas las actividades del libro.
- Ángulo de amplitud dada. Construye un ángulo de medida específica a partir de un vértice, un punto que define uno de sus lados y la amplitud deseada. Se utiliza, entre





otras, en la actividad sobre paralelas intersecadas por una transversal y en la construcción geométrica de un rombo a partir de un ángulo controlado.

- Arco de circunferencia. Traza un arco de circunferencia definido por su centro y dos puntos. Se utiliza en las actividades sobre relación entre ángulo central e inscrito, teorema de Tales sobre la circunferencia y longitudes de arco.
- Área. Calcula el área de un polígono o de una región limitada por una curva cerrada. Se utiliza en las actividades sobre semejanza y razón de áreas, y en la actividad sobre polígonos inscritos y circunscritos.
- Bisectriz. Construye la bisectriz de un ángulo. Aparece en las actividades sobre la bisectriz como lugar geométrico y sobre el incentro del triángulo.
- Circunferencia: centro, punto. Construye una circunferencia a partir de su centro y un punto que pertenece a ella. Aparece en las construcciones que incluyen el circuncentro y la circunferencia circunscrita, así como en varias actividades del capítulo sobre la circunferencia.
- Circunferencia: centro, radio. Construye una circunferencia a partir de un centro y un radio dados. Se utiliza en la construcción del rombo, en la actividad sobre la desigualdad triangular, en los criterios de congruencia, en la circunferencia inscrita y en la división de un segmento por aplicación del teorema de Tales.
- Deslizador. Crea un parámetro variable representado por una barra deslizante. Es una de las herramientas más potentes del libro, ya que permite estudiar cómo varía una construcción al modificar uno o varios parámetros. Aparece en prácticamente todas las actividades en las que se busca explorar invariantes y dependencias.
- Distancia o Longitud. Mide la distancia entre dos puntos o la longitud de un segmento, una poligonal

o el perímetro de un polígono. Es una de las herramientas más utilizadas a lo largo del libro.

- Homotecia. Aplica a un objeto una homotecia con un centro y una razón k dados. Se utiliza en las actividades sobre semejanza y razón de áreas.
- Intersección. Marca el punto o los puntos donde dos objetos se intersecan. Es una herramienta imprescindible en construcciones que requieren puntos determinados por la intersección de rectas, circunferencias u otras curvas. Se utiliza, por ejemplo, en la construcción del rombo a partir de circunferencias, en la actividad sobre la desigualdad triangular, en los criterios de congruencia y en las actividades de la circunferencia.
- Mediatriz. Construye la mediatriz de un segmento. Se utiliza en las actividades sobre puntos notables del triángulo (circuncentro) y sobre la mediatriz como lugar geométrico.
- Mueve. Permite arrastrar libremente los puntos y objetos de la construcción. Es la herramienta esencial del entorno dinámico, ya que hace posible la exploración, la verificación de invariantes y la formulación de conjeturas mediante la prueba del arrastre.
- Polígono. Construye un polígono uniendo puntos sucesivamente. Se utiliza en prácticamente todos los capítulos de la Parte III, en construcciones de triángulos, cuadriláteros y polígonos en general.
- Polígono regular. Construye un polígono regular a partir de dos vértices y el número de lados deseado. Aparece en las actividades sobre cuadrado, suma de los ángulos interiores de un polígono y polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia.
- Punto. Crea un punto libre en cualquier lugar de la vista gráfica. Es la herramienta más utilizada en el libro y está presente en casi todas las actividades.





- Punto en objeto. Crea un punto restringido a un objeto previamente construido, como una recta, una circunferencia o un polígono. Útil cuando se quiere que un punto se mueva libremente, pero solo a lo largo de una curva o figura. Aparece en las actividades sobre perpendicularidad, mediatrices y construcciones en la circunferencia.
- Punto medio o centro. Genera el punto medio de un segmento o el centro de una circunferencia. Aparece en las actividades sobre el cuadrilátero de puntos medios (paralelogramo de Varignon), las medianas y los puntos notables del triángulo.
- Rastro. Activa la huella visible que deja un objeto al moverse. Útil para hacer visible el camino que recorre un punto bajo un cambio paramétrico o una animación, como en la generación de la circunferencia a partir del movimiento de un punto que cumple una condición de equidistancia, o en la trayectoria del punto medio entre paralelas.
- Recta. Traza la recta determinada por dos puntos. Esta herramienta se utiliza ampliamente en el estudio de las relaciones entre rectas y ángulos, las rectas paralelas intersecadas por una transversal, los criterios de congruencia de triángulos y las aplicaciones del teorema de Tales.
- Recta paralela. Traza, por un punto dado, la única recta paralela a otra recta o segmento de referencia. Su uso es fundamental en la construcción de rectángulos, en el estudio de rectas paralelas intersecadas por una transversal y en las aplicaciones del teorema de Tales.
- Recta perpendicular. Traza por un punto dado la recta perpendicular a otra recta o segmento. Aparece en las actividades sobre perpendicularidad, alturas del triángulo y construcciones del rectángulo.
- Rotación. Rota un objeto un ángulo dado alrededor de un centro. Aparece en la actividad sobre

congruencia como invariancia bajo movimiento y en la construcción del rombo a partir de un ángulo controlado.

- Sector circular. Construye el sector circular definido por un centro y dos puntos de la circunferencia. Se utiliza en la actividad sobre longitudes de arco y áreas de sectores.
- Segmento. Traza un segmento entre dos puntos dados. Es la herramienta básica para construir polígonos y para visualizar relaciones entre puntos.
- Segmento de longitud dada. Construye un segmento a partir de un extremo dado y de la longitud especificada. Se utiliza en construcciones que requieren controlar la medida del segmento desde su definición.
- Semirrecta. Genera una semirrecta a partir de un punto inicial y otro que indica la dirección. Útil al trabajar con ángulos como abertura, ya que sugiere visualmente la infinitud de los lados, y en la construcción auxiliar del teorema de Tales para dividir un segmento.
- Simetría axial. Refleja un objeto respecto de una recta. También aparece en el menú como Refleja Objeto en Recta. Se utiliza en la actividad sobre congruencia como invariancia bajo movimiento, donde permite visualizar la inversión de orientación característica de la reflexión.
- Simetría central. Refleja un objeto respecto de un punto. Aparece en la construcción de polígonos circunscritos a una circunferencia.
- Tangente. Traza la tangente a una curva en un punto dado. Se utiliza en las actividades sobre la circunferencia, en particular en la perpendicularidad entre radio y tangente y en la construcción de polígonos circunscritos.



- Texto. Muestra en la pantalla expresiones algebraicas o numéricas dinámicas, vinculadas a los objetos de la construcción. Se utiliza en actividades donde es importante visualizar simultáneamente la figura y un valor numérico que cambia con ella, como razones, sumas de ángulos o áreas.
- Traslación. Traslada un objeto según un vector dado. Se utiliza en la actividad sobre congruencia como invariancia bajo movimiento.
- Vector. Define un vector libre con origen y extremo en dos puntos cualesquiera del plano. Se utiliza para definir la traslación de objetos en la actividad sobre congruencia.
- Vista Algebraica. Panel que muestra la expresión algebraica de cada objeto construido. Su uso simultáneo con la Vista Gráfica permite vincular cada figura con sus medidas y propiedades numéricas, y es una vía habitual para verificar invariantes y comparar valores.
- Vista Gráfica. Espacio bidimensional donde se construyen y manipulan los objetos geométricos del plano. Es la vista por defecto y la más utilizada en el libro.



Anexo 2. Mapa de actividades por contenido y nivel

Este anexo presenta el inventario completo de las actividades con GeoGebra desarrolladas en la Parte III del libro, organizadas por capítulo y por apartado. Para cada actividad se indica su título y un nivel escolar sugerido. Su propósito es ofrecer al docente una vía rápida para localizar las actividades pertinentes para los contenidos curriculares que esté enseñando, así como orientarlo sobre el grado de exigencia cognitiva que cada actividad supone.

La indicación de nivel debe entenderse como una referencia, no como una clasificación rígida. Una misma actividad puede trabajarse en niveles distintos modificando la profundidad de las preguntas, el grado de formalización, el lenguaje y las herramientas que se ponen en juego. La columna de nivel emplea las siguientes abreviaturas, P (primaria), S (secundaria), B (bachillerato), U (formación de docentes en facultades de educación o estudios universitarios afines).

Capítulo 5. Figuras y relaciones: rectas, ángulos y triángulos.

Apartado	Actividad	Título de la actividad	Nivel sugerido
5.1	1	Perpendicularidad sin prototipos	S, B
5.1	2	El ángulo como abertura y no como longitud de los lados	P, S, B
5.1	3	Paralelas intersecadas por una transversal	S, B
5.1	4	Construir una paralela a una recta por un punto exterior	S, B
5.1	5	La mediatriz como lugar geométrico	S, B, U
5.1	6	La bisectriz como lugar geométrico	S, B, U



Apartado	Actividad	Título de la actividad	Nivel sugerido
5.2	1	La suma de los ángulos internos: el invariante 180°	P, S, B
5.2	2	El triángulo isósceles con deslizadores	S, B
5.2	3	Clasificación inclusiva: ¿el equilátero es isósceles?	S, B, U
5.2	4	La desigualdad triangular	S, B
5.3	1	Medianas y baricentro	S, B
5.3	2	Mediatrices y circuncentro	S, B
5.3	3	Bisectrices e incentro	S, B
5.3	4	Alturas y ortocentro	S, B

Capítulo 6. Medida y proporcionalidad: congruencia, semejanza y el teorema de Tales.

Apartado	Actividad	Título de la actividad	Nivel sugerido
6.1	1	Congruencia como invariancia bajo movimiento	S, B
6.1	2	Los criterios de congruencia: condiciones que determinan un triángulo	S, B, U
6.2	1	Semejanza: conservar la forma cambiando la escala	S, B
6.2	2	La razón de semejanza y la razón de áreas	S, B, U
6.3	1	El teorema de Tales: la proporcionalidad entre paralelas	S, B
6.3	2	Aplicación del teorema de Tales: dividir un segmento en partes iguales	S, B



Capítulo 7. Los cuadriláteros entre los polígonos.

Apartado	Actividad	Título de la actividad	Nivel sugerido
7.2	1	El cuadrado girado: más allá del prototipo	P, S
7.2	2	Rectángulo, rombo y cuadrado: comparar propiedades	P, S, B
7.2	3	Construir un rombo que no se desarme	S, B
7.2	4	La familia de los rombos: de una forma fija a una propiedad invariante	S, B
7.2	5	El cuadrilátero de puntos medios	S, B, U
7.3	1	La inclusión entre cuadriláteros	S, B, U
7.3	2	Del rectángulo al cuadrado	S, B
7.3	3	El romboide y el rectángulo	S, B
7.3	4	La suma de los ángulos interiores de un polígono	S, B

Capítulo 8. Circunferencia y círculo.

Apartado	Actividad	Título de la actividad	Nivel sugerido
8.1	1	La circunferencia como lugar geométrico	P, S, B
8.1	2	Del radio al círculo: la región interior	P, S, B
8.1	3	Cuerda, secante y tangente: los elementos de la circunferencia	S, B
8.1	4	La tangente y el radio: una perpendicularidad notable	S, B
8.2	1	El descubrimiento de π	S, B
8.2	2	Ángulo central e inscrito: la ley del 2:1	S, B, U
8.2	3	El teorema de Tales sobre la circunferencia	S, B



8.2	4	Polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia	S, B, U
8.2	5	Longitudes de arco y áreas de sectores	S, B

¿Cómo usar este mapa?

El docente que busque actividades para un nivel particular puede recorrer la columna de nivel y seleccionar las marcadas con la abreviatura correspondiente. El docente que tenga en mente un contenido específico puede ir directamente al capítulo y apartado que lo trate. En todos los casos, conviene recordar que las actividades pueden adaptarse, esto es, una actividad clasificada como B puede trabajarse en S si se simplifica el lenguaje y se reducen las exigencias de formalización, y una actividad clasificada como S puede enriquecerse para U añadiendo demostraciones formales o conexiones con la matemática avanzada.

Un patrón general que se observa en el mapa es que las actividades sobre figuras y propiedades elementales (rectas, ángulos, cuadriláteros básicos) admiten un rango más amplio de niveles, mientras que las actividades sobre relaciones métricas, clasificación inclusiva y propiedades de la circunferencia se concentran preferentemente en secundaria, bachillerato y formación de docentes. Esta distribución refleja la progresión natural del razonamiento geométrico descrita en el Capítulo 2 del libro, que va desde el reconocimiento visual hacia la deducción formal.





Graciela Abad Peña

Licenciada en Matemática-Física y Doctora en Ciencias Pedagógicas. Docente investigadora acreditada en Ecuador, cuenta con una sólida trayectoria en docencia, investigación y gestión académica en programas de grado y posgrado. Es autora de libros y artículos científicos en educación y matemática educativa, publicados en revistas indexadas de prestigio regional e internacional, incluyendo Scopus y Web of Science (ESCI). Ha liderado la coordinación de proyectos de investigación científica y posee una amplia experiencia en la dirección de trabajos de grado, maestrías y tesis doctorales, consolidando su impacto en la formación de investigadores.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3684-7233>





Katia Lisset Fernández Rodríguez

Docente Titular de la Universidad de Guayaquil, Ecuador, con una sólida trayectoria académica, docente e investigativa en educación matemática y formación de profesionales de la educación. Es Licenciada en Educación con especialidad en Matemática, Maestra en Educación con mención en Dirección Educacional y Doctora en Ciencias Pedagógicas. En la Universidad de Guayaquil desarrolla docencia en pregrado y posgrado, participa en procesos de tutoría de tesis, asesoría pedagógica y coevaluación académica, y forma parte de programas de posgrado de la institución. Asimismo, imparte docencia de posgrado en la Universidad Bolivariana del Ecuador, en la Maestría en Educación Básica y en la Maestría en Educación con mención en Matemática. Su experiencia investigativa abarca proyectos vinculados con educación, formación docente y educación matemática, además de publicaciones en revistas científicas de alto impacto.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7146-2868>





Joel Castro Muñoz

Magíster en Enseñanza de la Matemática por la Escuela Superior Politécnica del Litoral, Licenciado en Educación por la Universidad Bolivariana del Ecuador e Ingeniero en Electrónica, Control y Redes Industriales por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Su trayectoria académica se ha orientado a la docencia y la investigación en educación matemática, didáctica de la matemática, modelación matemática y tecnologías aplicadas a los procesos de enseñanza y aprendizaje. Ha participado en proyectos de investigación científica y ha dirigido trabajos de titulación en programas de posgrado. Su línea de investigación actual se desarrolla en el marco de sus estudios doctorales en Matemática.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-4934-081X>





Johanna Graciela Briones Franco

Licenciada en Ciencias de la Educación, Magíster en Enseñanza de la Matemática, Magíster en Estadística Aplicada y Magíster en Evaluación de la Calidad y Certificación en Educación Superior por una universidad de España. Es docente investigadora acreditada por la Secretaría de Educación Superior, Ciencia, Tecnología e Innovación del Ecuador y cuenta con una amplia trayectoria en la docencia universitaria de grado y posgrado, así como en procesos de autoevaluación institucional, elaboración de planes de mejora y acreditación de instituciones de educación superior en el Ecuador. Actualmente cursa estudios doctorales. Posee sólidas competencias en análisis de datos mediante el uso de programas especializados como SPSS, RStudio, Jamovi y Google Colab, orientando su actividad académica e investigativa hacia la investigación cuantitativa, la analítica de datos y la gestión de la calidad de la educación superior.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4659-5372>



Marlene Ayoví Vanegas

Licenciada en Ciencias de la Educación, especialización en Física y Matemática, y Magíster en Enseñanza de la Matemática. Cuenta con 30 años de trayectoria en el Magisterio Fiscal del Ecuador, enseñando en Educación General Básica y Bachillerato. Ha ejercido funciones directivas como Rectora y Vicerrectora, aportando a la gestión institucional y a la mejora de los procesos formativos. Actualmente se desempeña como docente y responsable del Área de Matemática en la Unidad Educativa Babahoyo (Distrito 12D01), donde orienta el diseño y desarrollo de propuestas pedagógicas articuladas al currículo nacional.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-3820-4312>



GeoGebra® es una marca de GeoGebra. Este libro es una obra independiente y no está patrocinado, avalado ni afiliado oficialmente con GeoGebra.



✦✦ Conocimiento que transforma sociedades
✦✦ Tú inspírate, nosotros publicamos

Geometría en movimiento: exploraciones didácticas con GeoGebra. Tomo 1, presenta una propuesta para fortalecer la enseñanza de la geometría escolar mediante la integración de fundamentos teóricos, orientaciones didácticas y actividades diseñadas con GeoGebra. La obra parte del reconocimiento de que el aprendizaje geométrico no debe reducirse a la identificación de figuras ni a la aplicación mecánica de procedimientos, sino orientarse al desarrollo del pensamiento geométrico, la visualización, la representación, la argumentación y la construcción de significados. Desde esta perspectiva, analiza los principales obstáculos que enfrentan los estudiantes, como la dependencia de prototipos, la confusión entre dibujo y objeto geométrico y las dificultades para coordinar distintos registros de representación. Con base en los aportes de Van Hiele, Duval, Laborde, Fischbein y otros referentes de la didáctica de la matemática, el libro ofrece criterios para planificar experiencias de aprendizaje acordes con los niveles de razonamiento geométrico y el papel mediador de las representaciones. Asimismo, examina las potencialidades y limitaciones de GeoGebra, destacando que su valor educativo depende de una intervención docente intencional que favorezca la exploración, la formulación de conjeturas, la validación de relaciones y la argumentación matemática. La segunda parte traduce estos fundamentos en propuestas de aula organizadas en torno a rectas, ángulos, triángulos, congruencia, semejanza, teorema de Tales, cuadriláteros, polígonos, circunferencia y círculo. Cada capítulo incorpora secuencias didácticas, preguntas para la reflexión y orientaciones para la planificación, convirtiendo el libro en una herramienta para docentes, formadores e investigadores interesados en promover una enseñanza de la geometría más dinámica, comprensiva y sustentada en evidencias didácticas.



ISBN: 978-1-968794-49-1



9 781968 794491 >